

最終講義

超伝導と電磁気学

情報工学研究院
電子情報工学研究系
松下照男

平成23年 3月16日

主な研究業績

磁束ピンニング機構

ピンニングの加算理論

エネルギー散逸
極小原理の応用

縦磁界効果

磁束線の可逆運動

電磁気学

超伝導基礎

磁束線の相転移

各種電磁現象

超伝導電力
ケーブル

磁束クリープ

主な研究業績

磁束ピンニング機構

ピンニングの加算理論

エネルギー散逸
極小原理の応用

縦磁界効果

磁束線の可逆運動

電磁気学

超伝導基礎

磁束線の相転移

各種電磁現象

超伝導電力
ケーブル

磁束クリープ

内容

1. はじめに 経歴

2. 研究のトピックス

2.1. 磁束ピンニングにおける加算理論

2.2. 縦磁界効果

2.3. 電磁気学

2.4. 磁束クリープ

2.5. 超伝導ケーブル

3. まとめ

1. はじめに

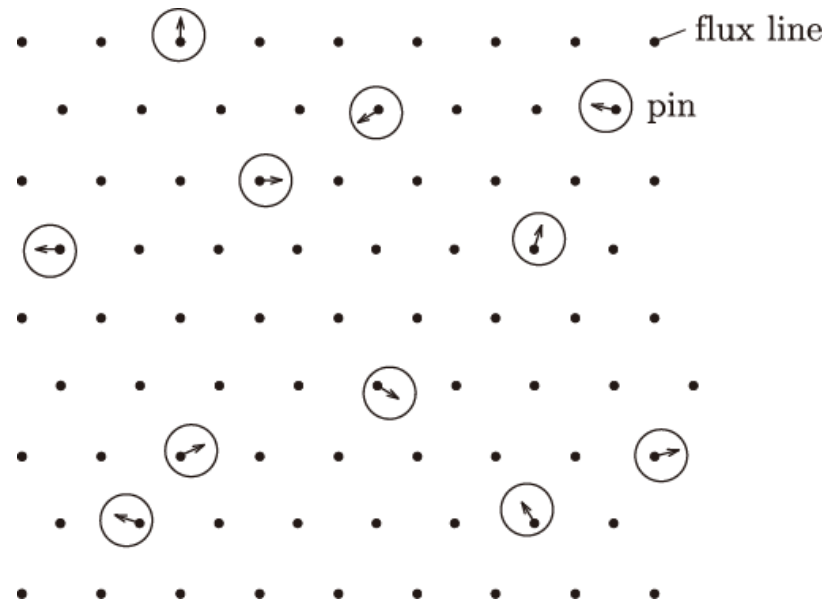
- 1966年3月 福岡県立八幡高校卒業
- 1969年4月 九州大学工学部電子工学科入江研究室
- 1970年3月 九州大学工学部電子工学科卒業
- 1972年3月 九州大学大学院修士課程電子工学専攻修了
- 1973年4月 九州大学大学院博士課程電子工学専攻退学
- 1973年5月 九州大学工学部電子工学科助手
- 1980年3月 工学博士(九州大学)
- 1980年6月 九州大学工学部電子工学科助教授
- 1990年4月 九州工業大学情報工学部電子情報工学科教授
- 1999年10月 九州工業大学評議員・学長補佐(総務企画担当)
- 2001年4月 九州工業大学副学長(総務企画担当)
(2003年9月まで)

2. 研究のトピックス

2.1. 磁束ピンニングにおける加算理論

加算理論とは

ランダムに空間的に分布するピン(欠陥)の要素的ピン力 f_p とその数密度 N_p の関数としてピン力密度を求める統計的、または動的理論



ランダムな方向を向き、力は打ち消しあう傾向

[加算理論の歴史]

1967年 Yamafuji-Irieによる動的理論
(ピンニング損失の原因)

損失の機構はOhmic損失しかないのに、なぜフロー比抵抗
 ρ_f に依存せず、 J_c のみで決まるヒステリシス損失となるのか？

粘性媒質(粘性係数 η)中における磁束線の運動速度のゆらぎ
による付加的損失

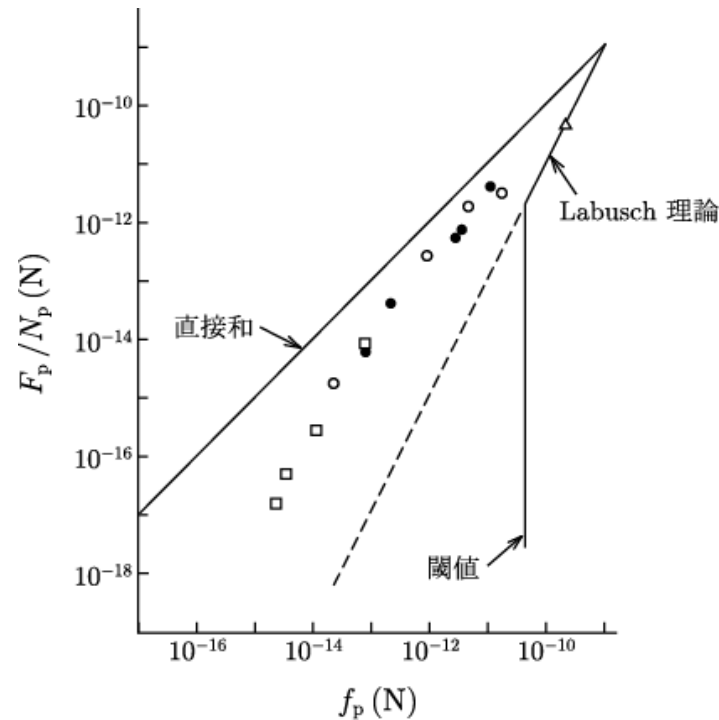
$$F_p v_0 = \frac{B\eta}{\phi_0} (v_0^2 - \langle v^2 \rangle)$$

ピンニング損失から J_c が決定

1969年 Labuschによる統計理論

ピンニングの強さを表すLabuschパラメーター α_L を導入
有効なピンとなるにはピン力 f_p が閾値 f_{pt} よりも大きい必要

1978年 Labusch理論の閾値の予想が定量的に現実と異なる
(Kramer)



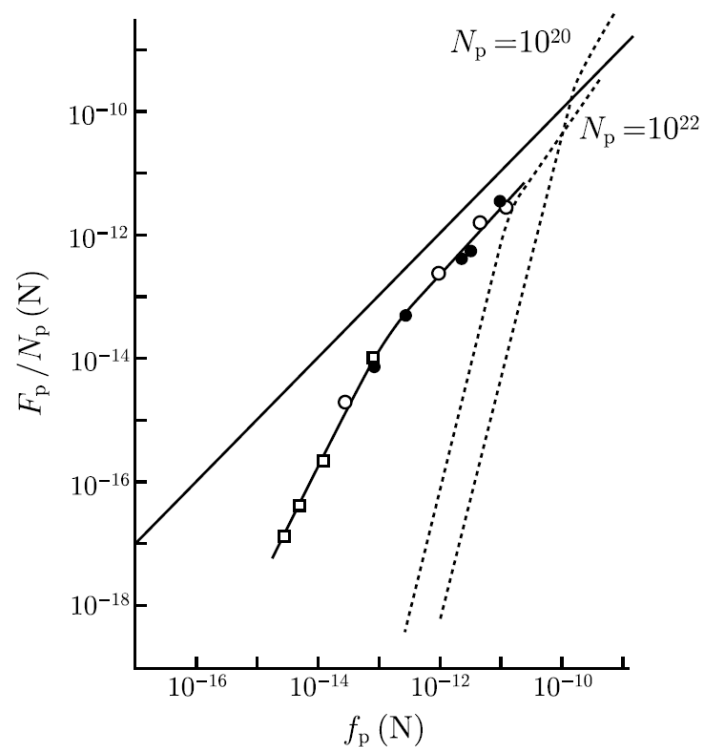
実験では閾値 f_{pt} が存在しないかのよう

1978年 Larkin-Ovchinnikovによる集合的理論

磁束線格子にはLabusch理論で仮定しているような**長距離秩序は存在しない**

相関距離のスケールの範囲内でピンカはゆらぎ程度は残る
ピンカに閾値は存在しない

(この理論は数学的問題を含み、かつ実験に合わない)



1979年 Matsushita, Kusayanagi & Yamafuji

動的理論(弱いピンでも磁束の速度に有限の影響を与える)

- ・静的極限で統計的理論に一致することを証明
- ・理論の統一を実現し、ヒステリシス損失の本質をより明確にすることに貢献したが、閾値の問題は残した

その後

Campbell法による実験

Labuschパラメーターはかなり小さく、磁束線は移動しやすい
(ピン力の閾値はかなり小さいはず)

Labusch理論の矛盾

- ・ピンが有効でなくなれば、磁束線は容易に変位可能
→ ピンニングに都合よい位置に簡単に移動でき、ピンは有効に
- ・Labuschパラメーターを用いながら、コンシステントな平均場理論とはなっていない

1981年以降；しばらく足踏み

近接効果に関するKramerとの論争(1981-1983)

表面付不可逆性(1983)

縦磁界効果(1981-1985)

福岡でのピン会議(1985)

Karlsruhe Nuclear Research Centerへの留学(1986)

高温超伝導体の発見(1986)

飽和現象(1988)

九工大への転出(1990)

「磁束ピンニングと電磁現象」の執筆着手(1992)

1994年 Coherent Potential近似理論を発表

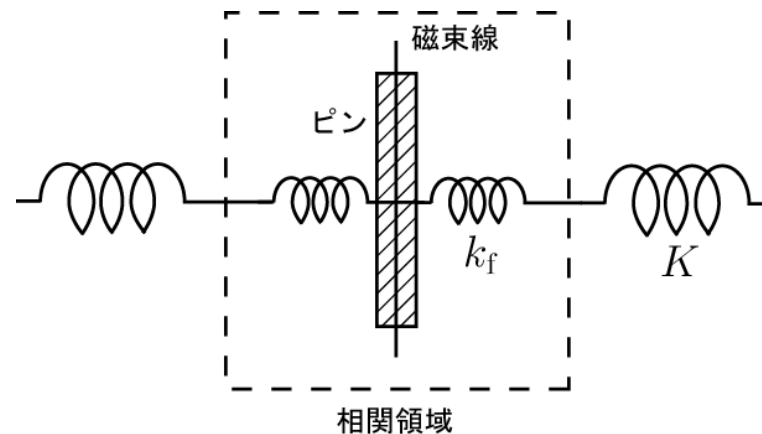
- ・平均ピンニング場の強さを表すLabuschパラメーター α_L を使用
- ・磁束線の長距離秩序は存在しない
- ・全てのピンの効果を仮想的に無効にしたときのみ実現
(相関距離が発散)
- ・仮想的な2つのステップ

(1) 直接関与するピンのみを無効にしたとき

磁束線位置 $x \rightarrow x_0$ この変形の変数 k_f
(従来はこのプロセスのみ。 k_f が一定の閾値に関与)

(2) すべてのピンを無効にしたとき

磁束線位置 $x_0 \rightarrow \Delta$ この変形の変数 K
(Δ は長距離秩序をもつ。 K が α_L に依存)



力の釣り合い(力の伝達)

$$f(x) = k_f(x - x_0) = K(x_0 - \Delta)$$

ピン力 近辺の弾性力 局所部分への弾性力

x_0 を消去

$$f(x) = k_f'(x - \Delta)$$

有効バネ定数 k_f' $k_f'^{-1} = k_f^{-1} + K^{-1} \approx K^{-1}$

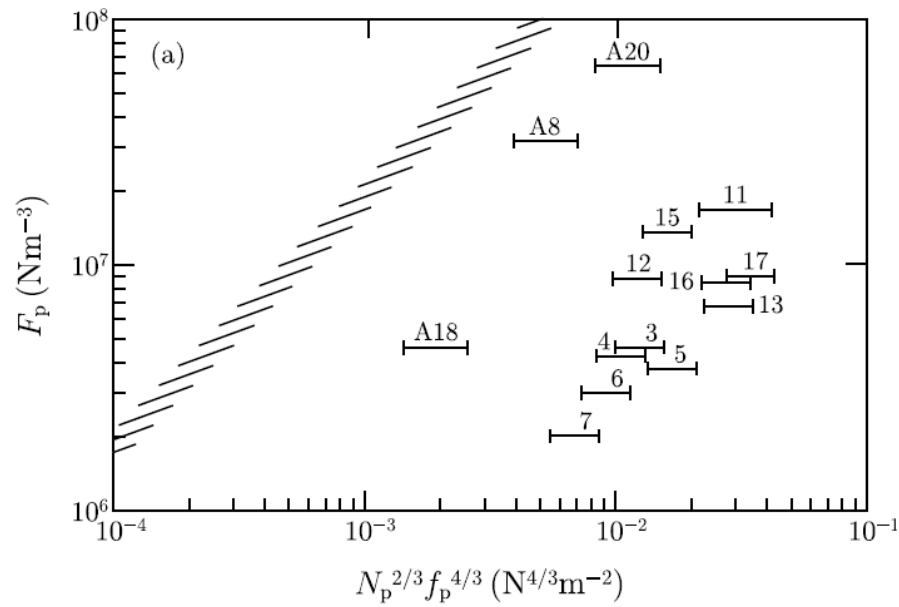
$$F_p = \frac{N_p}{a_f} \left| - \int_0^{a_f} f(x(\Delta)) d\Delta \right|_{\max}$$

計算結果

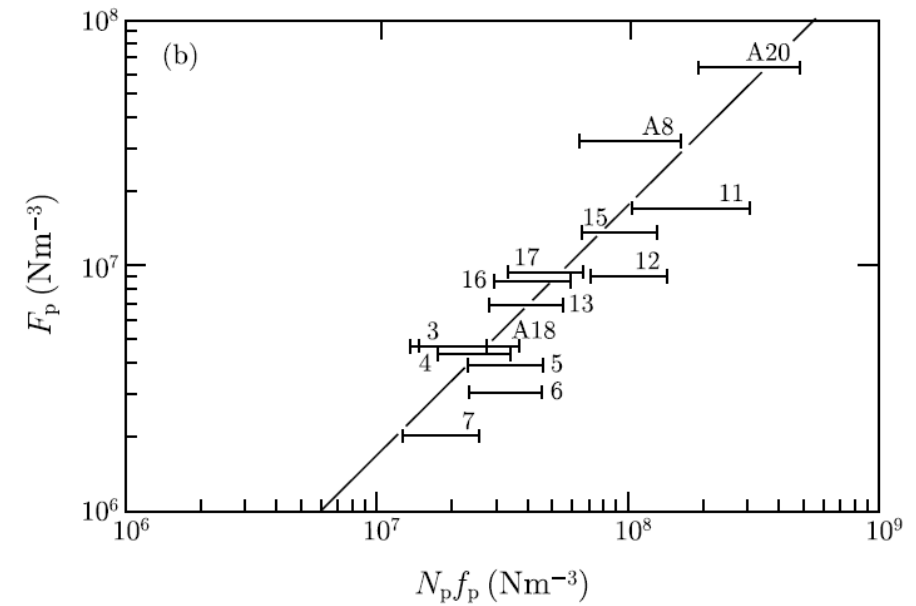
- ・閾値 f_{pt} : ピン力 f_p の関数で、必ず f_p より小さい
実質的な閾値は存在しない(すべてのピンは有効)
 - 強いピン: 線形和 $F_p \propto N_p f_p$
 - 弱いピン: 統計和 $F_p \propto N_p f_p^2$
- ・ピンニング損失はヒステリシス損失の性質
- ・動的理論への拡張はそのまま可能

ピンニングの加算に関する統一理論の完成

実験結果との比較 (常伝導析出物Nb₂NをピンにもつNb-Ta)

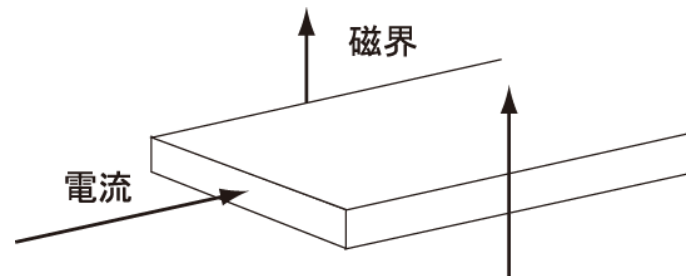
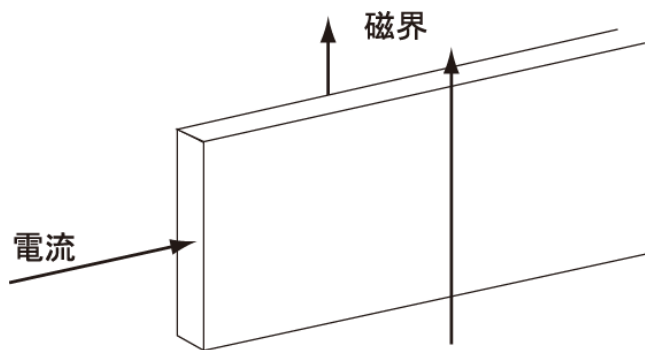


(Larkin-Ovchinnikov理論)

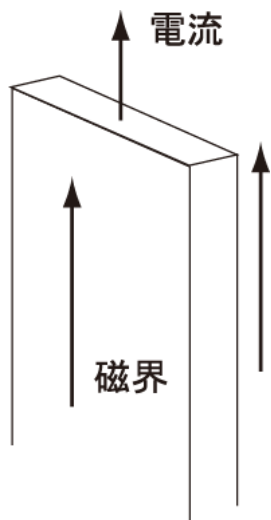


(Coherent potential近似理論)

2.2. 縱磁界効果



横磁界

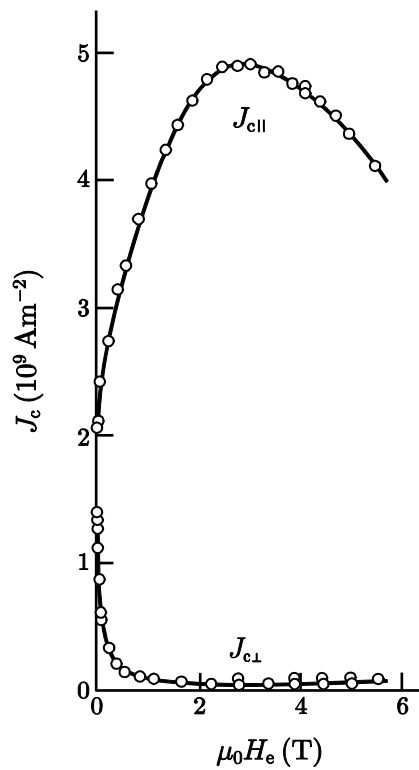


縦磁界

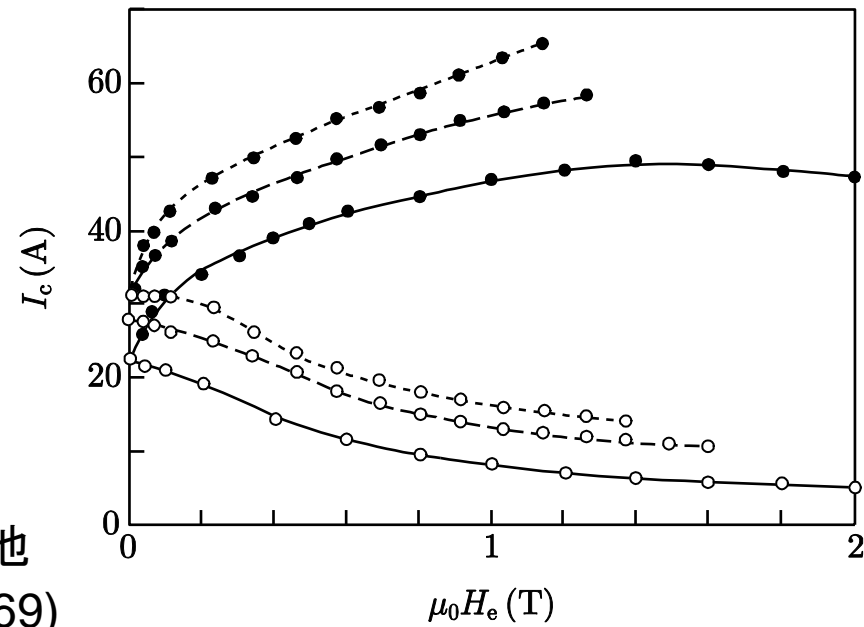
縦磁界効果

(1) (横磁界に比べて) **臨界電流密度**が大幅に増加

臨界電流密度: 電気抵抗なしに流せる最大電流密度

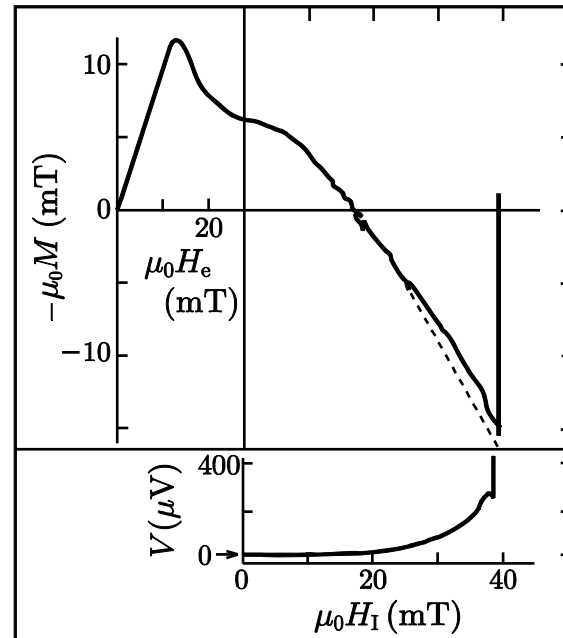


Bychikov 他
(Nb-Ti, 1969)



Kuren & Novak (Nb_3Sn , 1964)

(2)常磁性効果: force-free モデル ($\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$)で説明

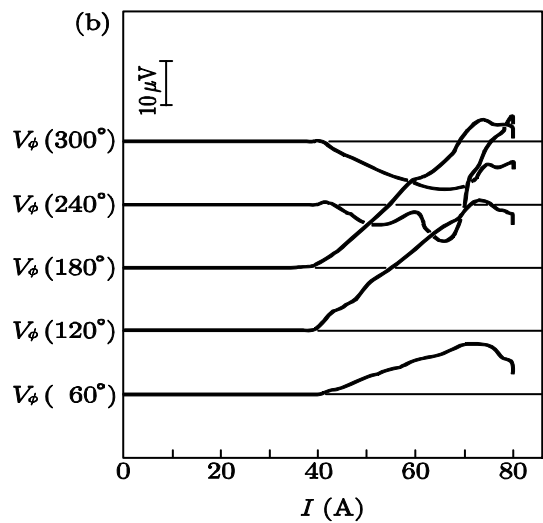
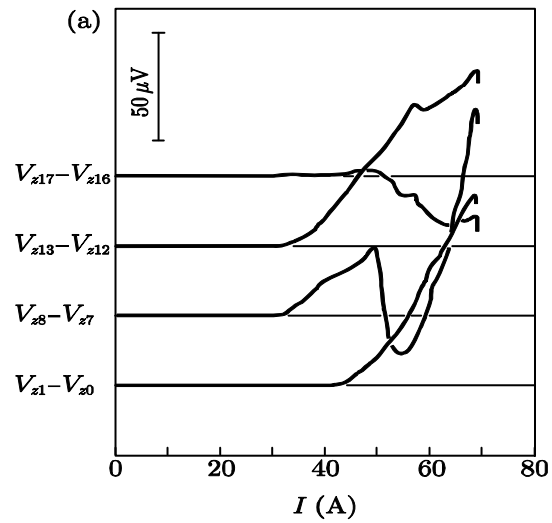


Walmsley(1972)

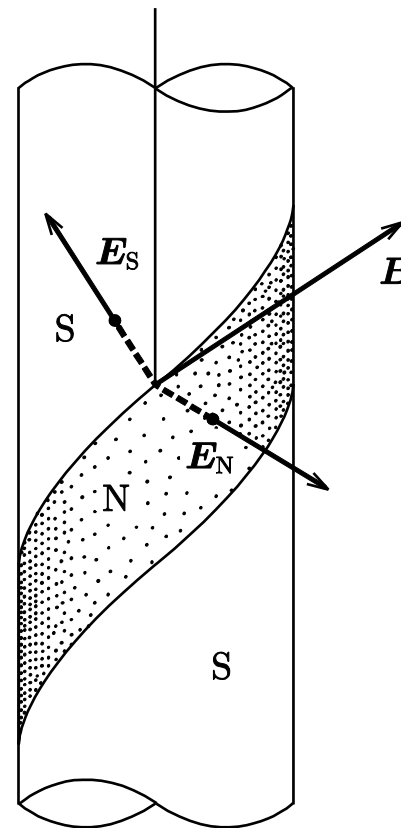
(3)Josephsonの式 $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v}$ (\mathbf{v} は磁束の速度)が満たされない
誘導電界 \mathbf{E} は \mathbf{B} とほぼ平行(Caveら、Kogan)
(Josephsonの式はFlemingの右手の法則に対応)

(4) 抵抗状態における表面電界構造

負の電界領域の存在



江崎(1976)



研究をスタートさせた1980年頃までの縦磁界効果についての考え方

- (a) Force-freeモデル(磁束密度 \mathbf{B} と電流密度 \mathbf{J} が平行)が成立
- (b) ピンがない超伝導体の平衡状態はforce-free状態(Josephson)
- (c) 磁束線の運動は角度を一定に保ったままの並進運動
- (d) Josephsonの式 $\mathbf{E}=\mathbf{B}\times\mathbf{v}$ が成立しない原因は磁束カッピング
- (e) Force-free状態は安定なので、 J_c の決定機構は磁束カッピング

(a)は実験事実として認めるとして、それ以外は疑問

1977年の入江-山藤研の夏のゼミでのあるグループの発表

14 mTの縦磁界中の半径0.8 mmの超伝導円柱の臨界電流が30 A

この結果から何を考えたか

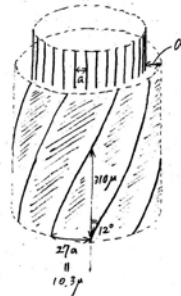
1977年の入江-山藤研の夏のゼミでのあるグループの発表

14 mTの縦磁界中の半径0.8 mmの超伝導円柱の臨界電流が30 A

この結果から何を考えたか

- ・電流を流さない初期状態での磁束線間隔は380 nm
- ・臨界状態に至るまでに、自己磁界の増加により表面から侵入する磁束線列はたったの12列
- ・磁化が連続的に変化するためには内部の磁束は表面磁界に対応して回転しなければならない・・・**従来の考え方の間違い**

しかし実際はその中間状態はどうか。例として self field $10e$ の増加に対しては 12列の fluxoid のうち 27本に1本の割合で超伝導体へ侵入する。このとき self field 増加前の fluxoid の方向を考えると、この割合で侵入した fluxoid は約 12 degree も傾いていなくてはならない。すなわち下図のような configuration を考えられる。(これもこの考えの正しいとすれば)

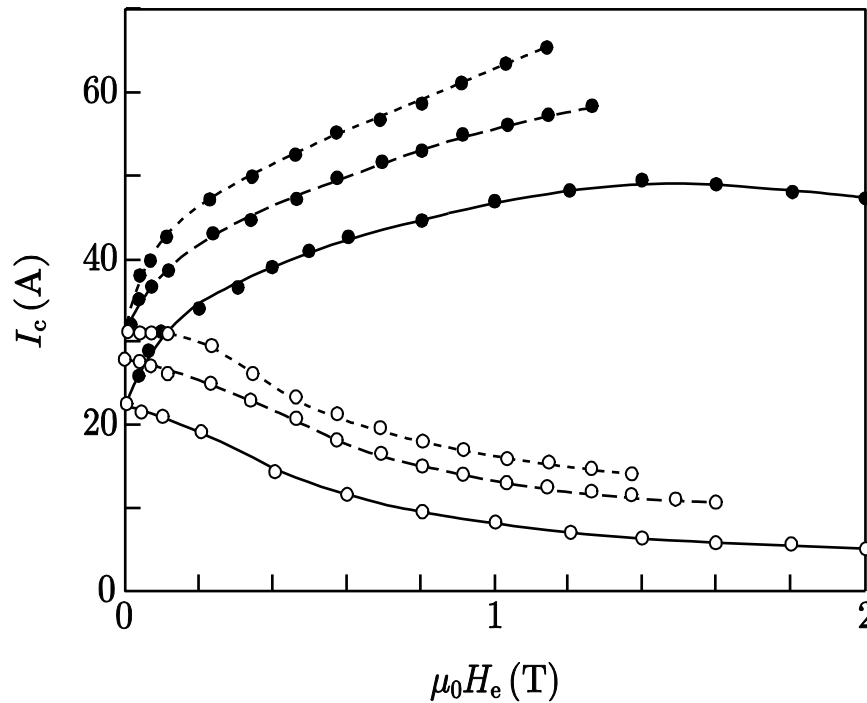


斜めの部分は H_z 方向の磁束条件を満たすための内側の "より" の fluxoid の表面に存在してはならない。

一列に並んでではなく、部分的に磁束が侵入するとすれば、その磁束線の角度はもっと大きくなる

self field が小さければ小さいほど侵入する fluxoid の数は急激に少なくなる。容易にわかるように傾き角は増加する。これは明らかである。従って self field 増加に対して前より磁束線も一緒に傾くのである。このことは critical state model の方程式から導かれる。磁束線の回転は他の回転に対して π の位相、電流による Magnetization の hysteresis の存在が道理である。

もう一つの縦磁界効果の機構を示唆する実験結果



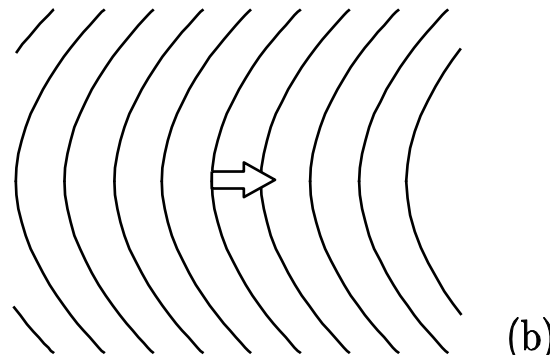
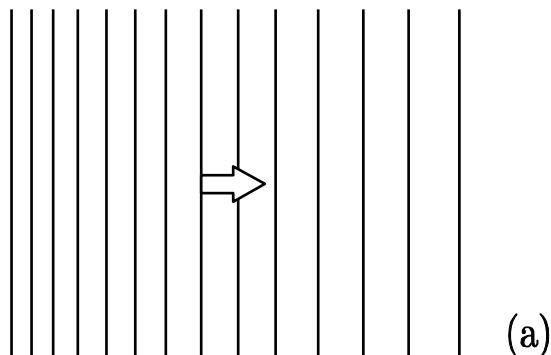
中性子照射による
欠陥で J_c が増加

縦磁界下の臨界電流密度も通常の横磁界下と同様、ピンニングの影響を受ける

ピンニングの安定化なしにはforce-free状態は安定ではない

どのような不安定さか？

磁束線の歪み



磁束密度差 (磁気圧)

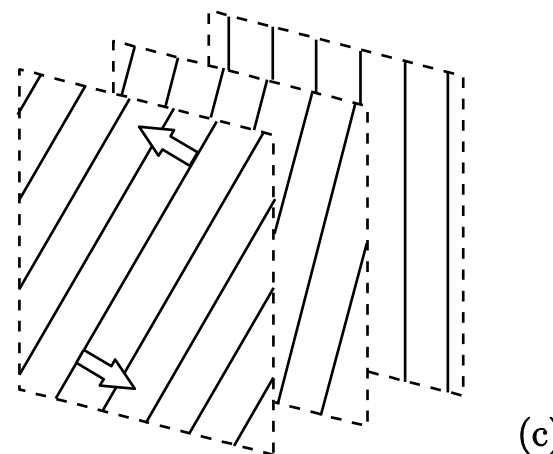
曲げ歪み (線張力)

(いずれもLorentz力として作用)

Force-free状態における磁束線構造
回転的な剪断歪み

磁束線を回転させるトルク

磁束線が回転するという予想と一致



もう一つの点：

磁束線の回転運動が起これば、誘導電界はほとんど磁束密度に平行(実験結果を説明)

Josephsonの理論

平衡状態： 外部からの入力エネルギー = 蓄積エネルギー

磁束密度の変化によるベクトルポテンシャルの変化： $\delta \mathbf{A}$

対応する磁束線の変位： $\delta \mathbf{u}$

ゲージ $\delta \mathbf{A} = \delta \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ を仮定

しかし、これは縦磁界下で満たされていない $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v}$ と同義

正しく計算すれば平衡条件は $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$ でなく、 $\mathbf{J} = 0$

予想通り、ピンニングによる安定化なしには force-free 状態は不安定

Force-free トルクの導出

Force-free歪の導入

一様な磁束 \Rightarrow 外部磁界を回転

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= (B_x, 0, B_z) \\ &= (B \sin \theta, 0, B \cos \theta)\end{aligned}$$

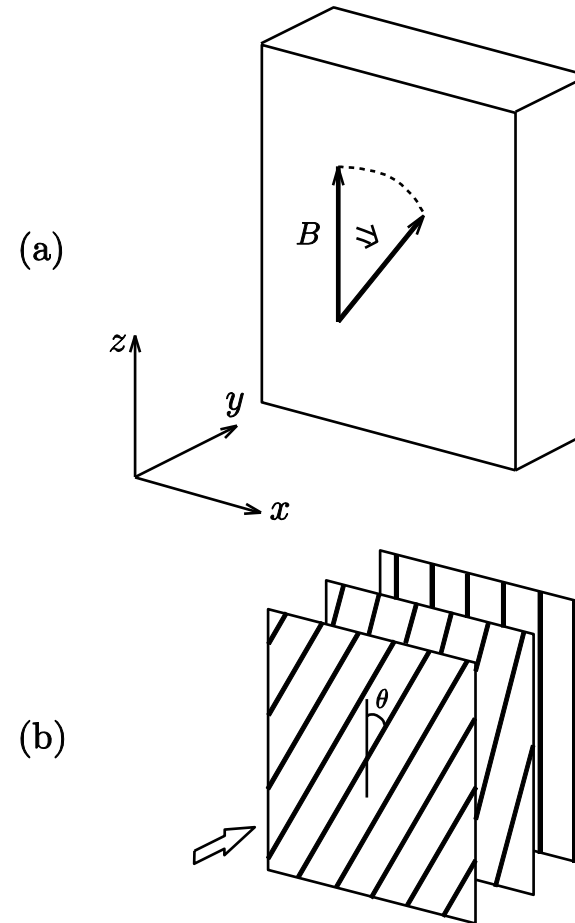
$$\theta = \theta_0 - \alpha y = \alpha (y_0 - y)$$

y_0 を一定に保ち、 α を増加

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \mu_0^{-1} \text{rot } \mathbf{B} \\ &= (J \sin \theta, 0, J \cos \theta)\end{aligned}$$

$$J = \alpha B / \mu_0$$

$\mathbf{J} \parallel \mathbf{B} \Rightarrow$ force-free 状態



誘導電界

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{歪 } \alpha \text{ が時間変化}$$

$$\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z); \quad y > y_0 \text{ で } \mathbf{E} = 0 \text{ (磁束分布の変化なし)}$$

$$E_x = \frac{B}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial t} (\sin \theta - \theta \cos \theta)$$

$$E_z = \frac{B}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial t} (\theta \sin \theta + \cos \theta - 1)$$

\mathbf{E} : 大部分は B_x の増加を妨げようとする誘導電界で

z 軸方向 $\Rightarrow E$ は B とほぼ平行

\Rightarrow Josephson の式 ($\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v}$) からの外れ

表面におけるPoyntingベクトル

$$\mathbf{S} = \mu_0^{-1} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

y 軸の正方向 (超伝導体へのエネルギーの流れ)

入力パワー密度

$$p = \frac{B^2}{\mu_0 \alpha^2 y_0} \frac{\partial \alpha}{\partial t} [\alpha y_0 - \sin(\alpha y_0)]$$

入力エネルギー密度 ($\theta_0; 0 \rightarrow \theta_m$)

$$w = \int p dt = \frac{B^2}{\mu_0} \int_0^{\theta_m} \frac{1}{\theta_0^2} (\theta_0 - \sin \theta_0) d\theta_0 \cong \frac{B^2 \theta_m^2}{12 \mu_0}$$

Force-freeトルク密度

$$\Omega = \left| -\frac{\partial w}{\partial \theta_m} \right| = \frac{1}{6} B J y_0$$

蓄積エネルギーは変化せず、Josephsonの理論通りにはなっていない
(入力エネルギーがそのままforce-free歪みのエネルギー)

Force-freeトルクとピンニングトルクの釣り合い

⇒ 臨界電流密度を決定

ピンニングの強さに依存する臨界電流密度を説明
(横磁界下のLorentz力とピン力の釣り合いに対応)

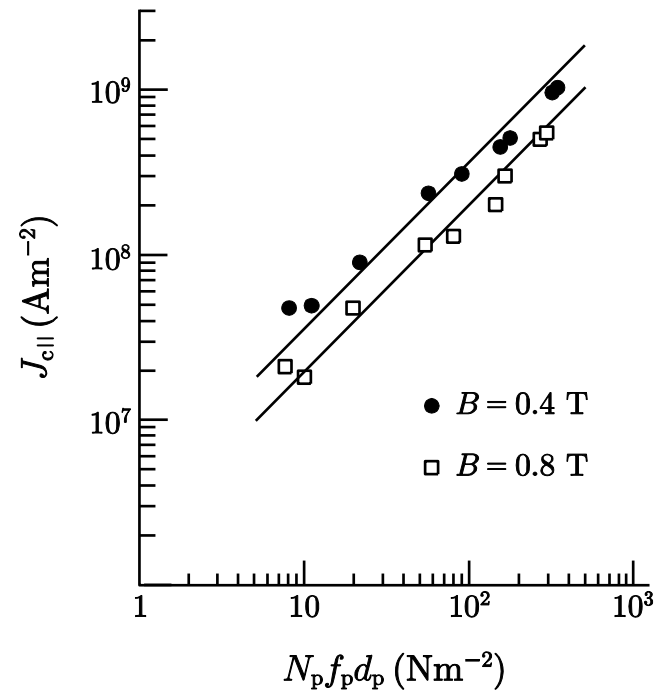
臨界電流密度がピンニングトルクに比例することを実証

臨界電流密度 vs ピンニングトルク密度

f_p : 要素的ピン力、 N_p : ピン密度

d_p : ピン間隔

観測されるforce-free状態はピンニングで安定化されたもの



磁束線の回転運動解の導出

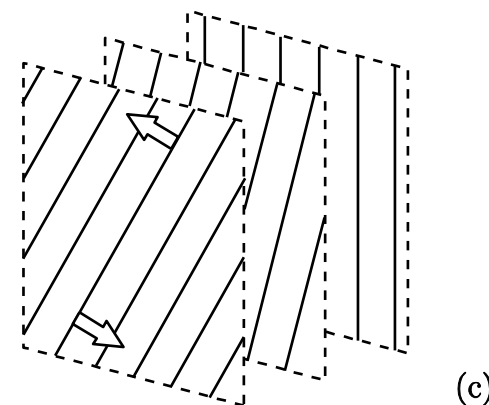
Force-free モデルで記述される磁束構造の変化の際に、磁束の連続の式から**回転運動の解を発見**

$$\text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z); \quad v_x \sim r \theta' \cos \theta, \quad v_z \sim r \theta' \sin \theta$$

$$r = (x - x_0) \sin \theta + (z - z_0) \cos \theta; \quad \text{回転半径}$$

$$(x_0, y, z_0) \text{ は回転中心, } \theta' = \partial \theta / \partial t$$



ピンニングトルクを上回った force-free トルクにより駆動された運動

誘導電界

ほとんど \mathbf{B} に平行 \Rightarrow **Josephson の式からの外れ** (実験結果の説明)

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v} - \text{grad } \phi \quad (\phi \text{ は静電位ではない})$$

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{J} \cdot \text{grad } \phi \quad (\text{電界の主要項は第2項})$$

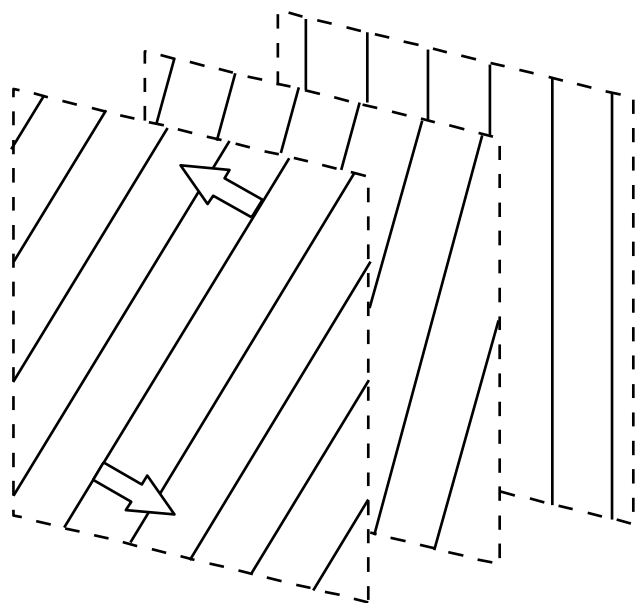
抵抗状態における表面電界構造

Force-free トルクがピンニングトルクを超えると

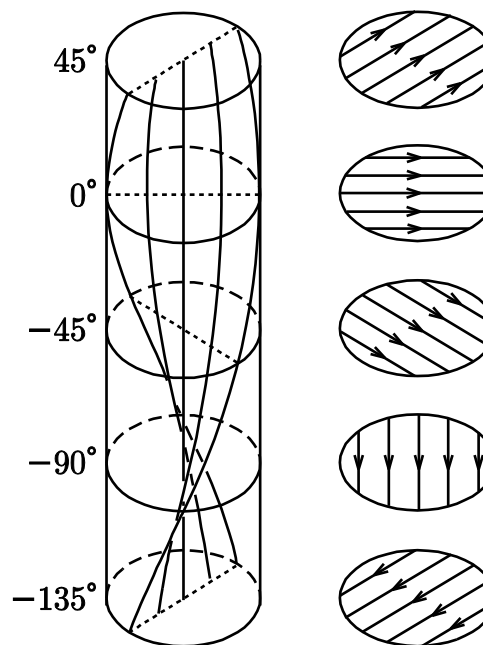
・・・ 不安定運動 (**回転運動**: 上回ったf.f.トルクによる)

ただし、定常状態を保つために**併進運動**を誘導

・・・ 円柱形状では **らせん磁束フロー**



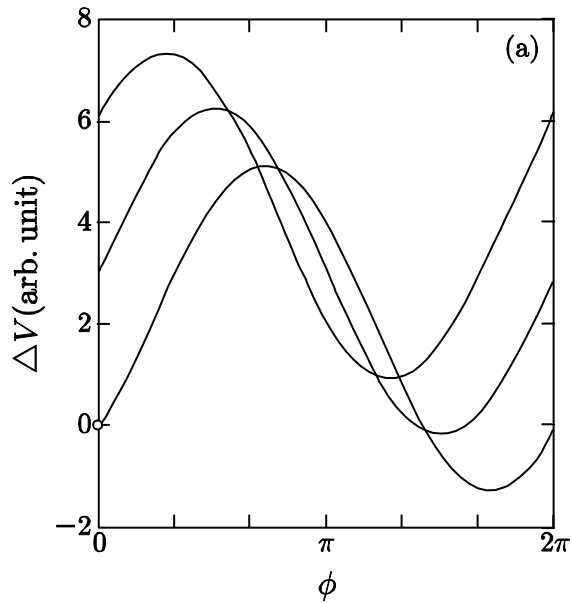
(c)



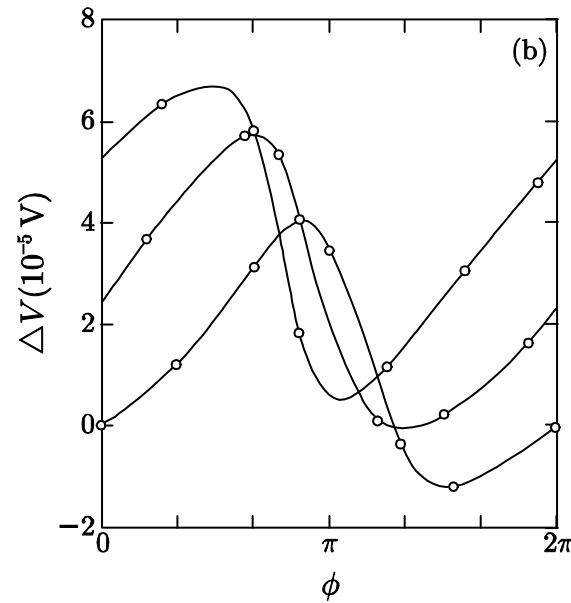
(a)

(b)

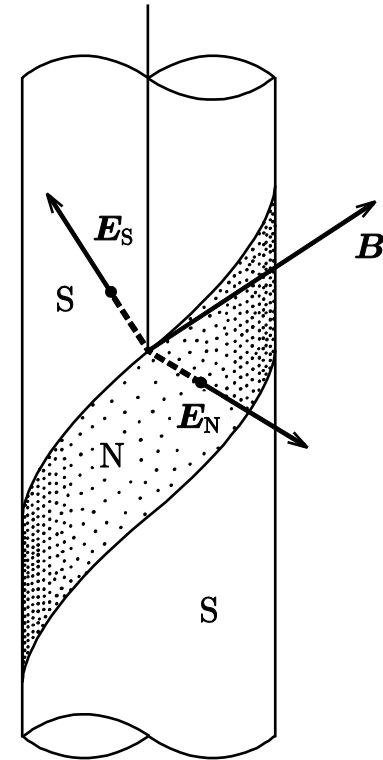
実験結果と理論結果の比較



(理論)



(実験: 江崎)



磁束が外に出る部分で負の電界 ($B \times v$ の項による)

電界の損失成分は再び第二項から

負の電界領域においてもエネルギー生成はない ($E \cdot J > 0$)

抵抗率から磁束の縦成分が運動 (らせん磁束フローの証明)

ピンニングがあるのに force-free モデルとなる理由の説明

なぜ $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\mathbf{F}_p$ とならないか？

ローレンツ力とピン力の釣り合い

Force-free トルクとピンニングトルクの釣り合い

いずれにもピンニング・エネルギーが関与

⇒ 熱力学的にエネルギーの分配

エネルギー散逸最小の原理

⇒ エネルギーはトルクの釣り合いに主として分配
(損失エネルギーは臨界電流密度に逆比例)

⇒ 力の釣り合いからピン力が消える

ピンニングにより force-free 状態が安定化される！

縦磁界効果の静的、準静的、動的状態の電磁現象を force-free トルクおよびこれに駆動された磁束の回転運動によって総合的に説明。これによりトルクの存在を立証した。

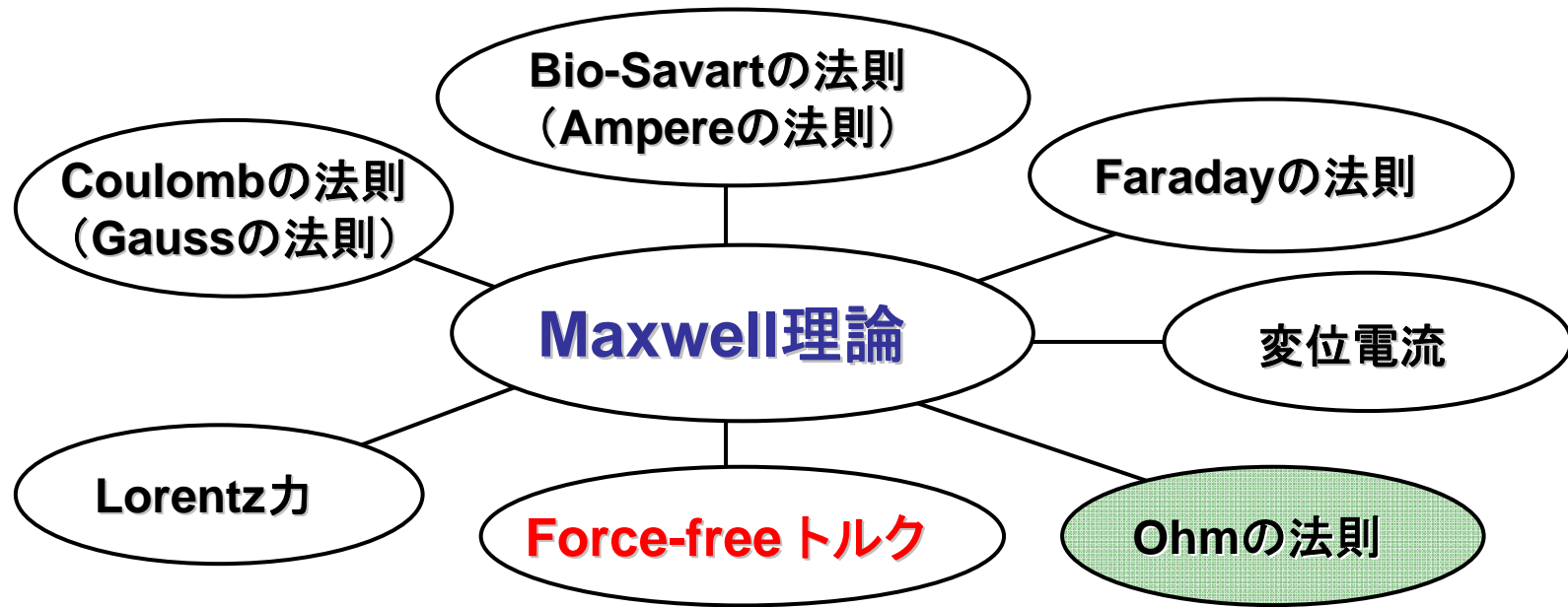
縦磁界効果の静的、準静的、動的状態の電磁現象を force-freeトルクおよびこれに駆動された磁束の回転運動によって総合的に説明。これによりトルクの存在を立証した。

縦磁界効果の電磁現象としての特殊性

- (1) 磁束線運動の実体の運動(力学)からの違い
位相速度としての性質
- (2) 力に起因しないトルク

Force-freeトルク

Lorentz力に続く**第二の磁気力**で、電磁気学における**基本法則の一つ**であり、**Maxwell理論**の完成(1864)後も百数十年発見されなかった



Ohmの法則は別(単なる経験則)

これまでforce-freeトルクが発見、観測されなかった理由

- ・力が存在しないから(Lorentz力は0)、トルクもないという固定概念
- ・Ohmの法則が成立しない超伝導体で、しかも縦磁界という特殊環境
- ・Force-freeトルクは内力的なトルクで、全体では打ち消しあって0となり、実験的に観測されない。

相対性理論とforce-freeトルクとの類似点

- (1) いずれも観念論的に予想
相対性原理と光速度不滅の原理
歪みと復元力の自然原理
- (2) 既存の重大な概念との食い違い
Newton力学
Lorentz力しかないという固定概念
- (3) 特殊な環境下でのみ出現
光速度に近い速度、巨大重量
縦磁界下の超伝導体
- (4) 実験によって間接的に証明
ミューオンの寿命、重力場の影響
縦磁界効果の総合的説明
- (5) 電磁気理論の新しい展開において誕生

2.3. 電磁気学

E - B 対応の中での導体と超伝導体の対応

導体

超伝導体

$$\mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{B} = 0$$

$$\rho = 0$$

$$\mathbf{i} = 0$$

ϕ 一定

\mathbf{A} 一定

渦なし

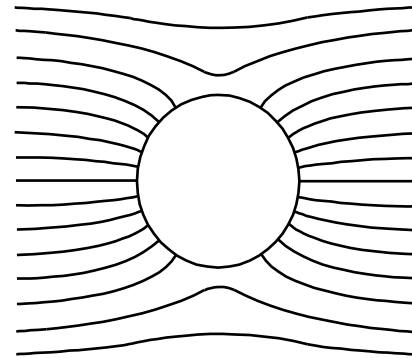
発散なし

(発散あり)

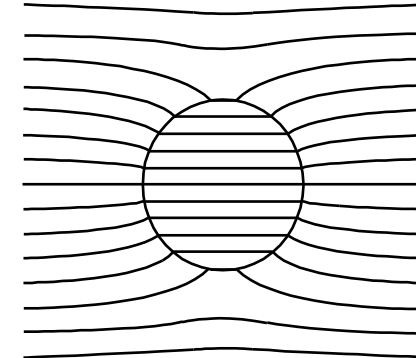
(渦あり)

真電荷が遮蔽

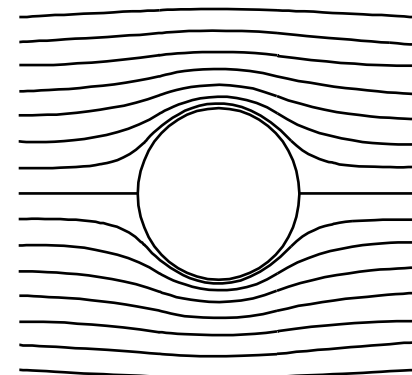
真電流が遮蔽



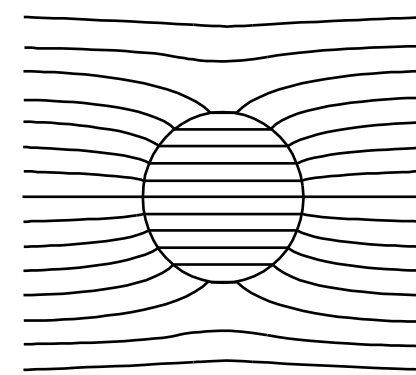
(a)



(b)



(c)



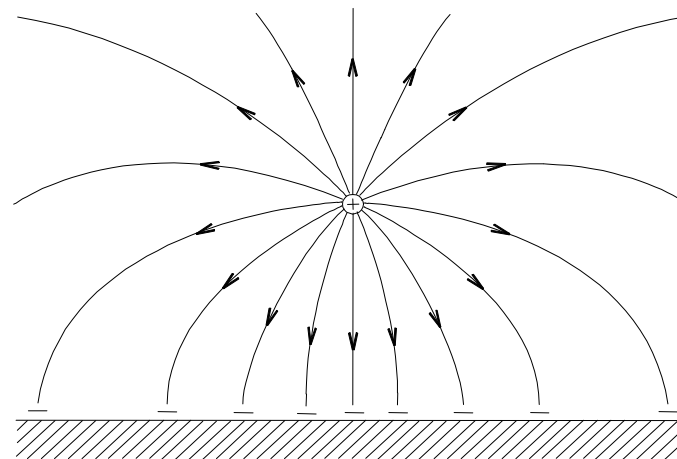
(d)

上： 一様な電界中の電束 (導体と誘電体)

下： 一様な磁界中の磁束 (超伝導体と磁性体)

導体平面($z=0$)上の a の位置に線電荷(密度 λ)を置いたときの電位と電気力線

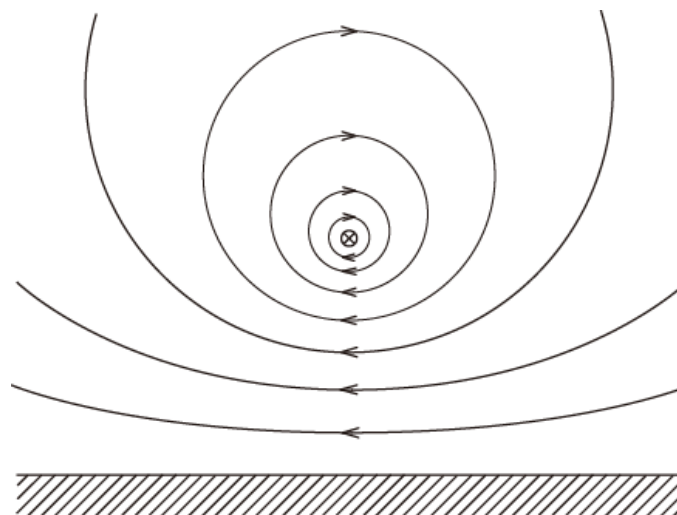
$$\phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \frac{x^2 + (z+a)^2}{x^2 + (z-a)^2}$$



超伝導体平面($z=0$)上の a の位置に電流 I を置いたときのベクトルポテンシャルと磁束線

$$A_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \log \frac{x^2 + (z+a)^2}{x^2 + (z-a)^2}$$

$$\mathbf{A} = (0, A_y, 0)$$



初等電磁気学への超伝導導入のメリット

- ・電気現象と磁気現象の対称性の向上
- ・孤立した磁束保存系
 - ⇒ 電磁誘導によらず、磁気力に抗した**力学的仕事から静磁気エネルギーを導出**できる
(従来は、電磁誘導による電気エネルギーに換算してから)
逆に、**電磁誘導の予測も可能**
- ・真電流の磁化と磁化電流の磁化の分離
 - ⇒ **磁性体の磁化との明確な区別**を通して、 **$E-B$ 対応の高度化**に貢献
(導体の静電誘導と誘電体の電気分極の関係に対応)
- ・電磁誘導に関する統一的記述
 - ⇒ **ファラデーの法則とフレミングの右手の法則の統一**
(磁束の連続の式より磁束分布の時間変化を磁束の速度として求めることができる)

超伝導体は特殊な物質でなく、電磁気学的には一般の物質

E - B 対応が根本的なものであれば、電磁気学の完成直後、 $E = 0$ となる導体に対応して完全反磁性 ($B = 0$) を示す物質を予測しても不思議ではない。

このとき、遮蔽は輸送電流で与えられるため、永久に遮蔽が続くためには、その物質の電気抵抗は0でなければならない

19世紀において超伝導体の存在の予言は可能であった！

(形式的とは言え、それくらいMaxwell理論は有効)

現実には予言した人はおらず、実験では1911年に電気抵抗が0となることが発見され、Meissner効果の発見は1933年

超伝導体の存在

経験的なOhmの法則が成立せず、純粹に物理学的法則に支配されて電流が決定 (Ohmの法則はローカル・ルールに)

⇒ その一つが縦磁界効果

これ以外にも新たな現象の発見、新しい理論が誕生する可能性

改めて超伝導体における電流の決定機構について

超伝導体における電流の流れ方

経験則であるOhmの法則から離れ、純粹に物理的法則から決まる

Meissner 状態

London 自由エネルギーの最小化

$$\text{(London エネルギー)} \quad F = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 + \frac{\lambda^2}{2\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B})^2$$

$$\text{(変分原理)} \quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}} - \nabla \times \frac{\partial F}{\partial (\nabla \times \mathbf{B})} = 0$$

$$\text{London 方程式} \quad \mathbf{B} + \lambda^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = 0$$

混合状態における電流： 臨界状態モデル

Irie-Yamafuji モデル

独立変数： B (磁束密度) と v (磁束の速度)

方程式

力の釣り合いの式

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} - F_p \left(|\mathbf{B}| \right) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} - \frac{\eta |\mathbf{B}|}{\phi_0} \mathbf{v} = 0$$

磁束の連続の式

$$\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

電流特性 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \rho_f^{-1} \mathbf{E}$ $\rho_f = \frac{\phi_0 B}{\eta}$ (フロー比抵抗)

しかしながら、現象論的モデルによる「仮定」でしかなく

物理的第一原理からの証明がない！

[目的]

静的、もしくは準静的状態に限って臨界状態を表す

力の釣り合いの式を第一原理から導く

この場合、取り扱うのは孤立磁束線系であり、ピン力は**可逆**

その後、以下の取り扱いが必要

- ・非孤立系への拡張
- ・可逆領域から不可逆領域への拡張

対象: H_{c1} より十分高い磁界中にある高 κ 超伝導体

磁気エネルギーとピンニング・エネルギーだけ考慮
凝縮エネルギー(反磁性効果)等は無視

孤立磁束線系に対する変分原理

Lagrange 関数

$$L = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 - U_p \quad U_p: \text{ピンニング・エネルギー密度}$$

一様な磁束密度 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ から $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$ に変化 ($|\mathbf{b}| \ll |\mathbf{B}_0|$)

磁界のエネルギー
$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} (\mathbf{B}_0 + \mathbf{b})^2 = \frac{1}{2\mu_0} (\mathbf{B}_0^2 + 2\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2)$$

磁束密度の変化に伴う磁束線の変位 u ($\perp \mathbf{B}_0$)

$$\mathbf{b} = \nabla \times (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{u}) = -(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{B}_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = -B_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \zeta} + \mathbf{B}_0 \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

\mathbf{B}_0 方向の微分: $\partial/\partial \zeta$, u 方向の微分: $\partial/\partial \xi$

B_0 , u 方向の単位ベクトル \mathbf{i}_ζ , \mathbf{i}_ξ

磁界のエネルギー(一定項を除く)

$$U_m = -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \left[2\frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 \right]$$

Euler方程式

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} - \mathbf{i}_\xi \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial L}{\partial (\partial u / \partial \zeta)} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial L}{\partial (\partial u / \partial \xi)} \right] = 0$$

第1項: $-\partial U_p / \partial \mathbf{u} = \mathbf{F}_p$ ピンカ密度

第2項 $-\mathbf{i}_\xi \frac{B_0^2}{\mu_0} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right)$

電流密度

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{b} = -\frac{1}{\mu_0} \left(B_0 \nabla \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \zeta} - \nabla \times B_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \right) \\ &= -\mathbf{i}_\eta \frac{B_0}{\mu_0} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{i}_\eta = \mathbf{i}_\zeta \times \mathbf{i}_\xi$$

Lorentz力

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B}_0 = -i_\xi \frac{B_0^2}{\mu_0} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right)$$

第1項：線張力、 第2項：磁気圧

力の釣り合いの式

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{F}_p = 0$$

知られた力の釣り合いの式が得られた。

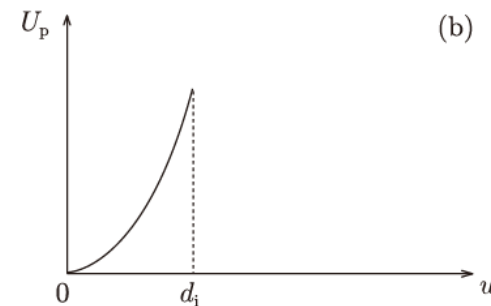
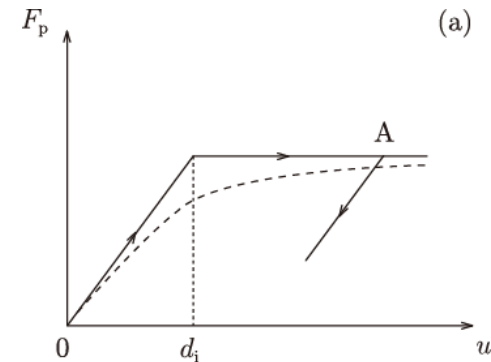
この後

- ・ **非孤立系への拡張**

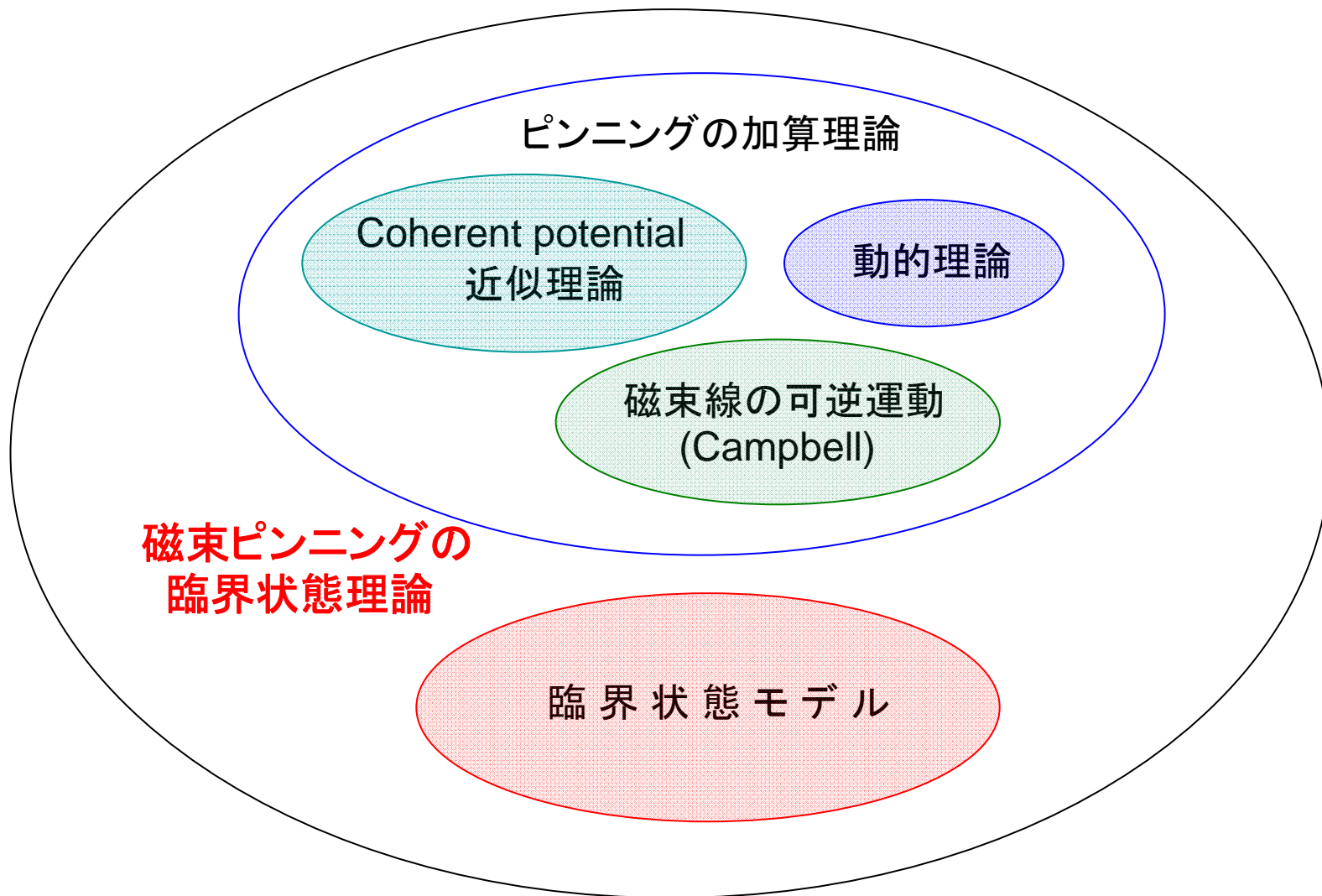
仮想変位とPoyntingベクトルによる
エネルギーの移動

- ・ 可逆領域から **不可逆領域への拡張**

加算理論と動的理論 (Yamafuji-Irie)



これにより、単なる現象論的モデルではなく、臨界状態を記述する理論として確立



改めて縦磁界効果について

変分原理によってforce-freeトルクは導かれない

孤立系に対する変分原理では静的な磁界のエネルギーしか考慮しておらず、非孤立系の場合には電磁誘導でエネルギーが流入

$$P = \int_S \mathbf{S}_P \cdot d\mathbf{S} = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \right] dV$$

$$\mathbf{S}_P = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / \mu_0$$

したがって、仮想変位させてPoyntingベクトルから求めるしかない(Force-free歪み導入の際は蓄積エネルギーが変化しない!)

Lorentz力の場合には磁界のエネルギーを原資として歪を生じえるので、変分原理が使える(電磁誘導とは無関係)

Josephson は「入力エネルギー=蓄積エネルギー」の関係から非孤立系の平衡状態を表すものとしてforce-free状態を導いたが、force-free歪を作る場合は電磁誘導によってエネルギーが流入する

上記の点の見落としがJosephson の理論を縦磁界に応用する際の失敗の原因

この歪みのエネルギーはどうなるか？(問題)

2.4. 磁束クリーブ

ピン止めされた磁束の熱揺動運動

- 磁化の緩和(ピンニング電流の時間的減衰)
- 臨界電流密度の減少
- 電界の発生 → $J_c = 0$ (不可逆磁界)

不可逆磁界

定義: (ある基準によって定義された) J_c が 0 となる磁界

経験的に

J_c を定義する通常の電界領域では**磁束クリープ**が主(フローではない)

- 磁束クリープによる電界

$$E = Ba_f v_0 \exp\left[-\frac{U(J)}{k_B T}\right]$$

a_f : 磁束格子間隔

v_0 : 振動周波数

$U(J)$: 活性化エネルギー

- 臨界電流密度

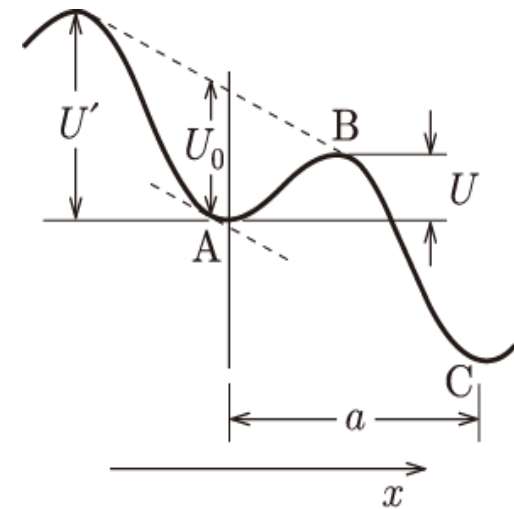
$$E_c = Ba_f v_0 \exp\left[-\frac{U(J_c)}{k_B T}\right]$$

E_c : 電界基準

- 不可逆磁界

$$E_c = Ba_f v_0 \exp\left[-\frac{U_0}{k_B T}\right]$$

$J = J_c \rightarrow 0$ で $U(J) \rightarrow U_0$ (ピン・ポテンシャル)



ピン・ポテンシャル

$$U_0 = \hat{U}_0 V$$

$$\hat{U}_0 = \frac{1}{2} \alpha_L d_i^2 = \frac{1}{2} J_{c0} B d_i$$

α_L : Labuschパラメーター

$d_i = a_f / \zeta$: 相互作用距離

$$V = LR^2: L < d \quad (\text{3次元ピンニング})$$

$$= dR^2: L > d \quad (\text{2次元ピンニング})$$

$$L = \left(\frac{C_{44}}{\alpha_L} \right)^{1/2} = \left(\frac{Ba_f}{2\pi\mu_0 J_{c0}} \right)^{1/2}$$

d : 試料の厚さ($\parallel B$)

$$R = \left(\frac{C_{66}}{\alpha_L} \right)^{1/2} = ga_f$$

g^2 : 磁束バンドル中の磁束線数

$$U_0 = \frac{0.835g^2 k_B J_{c0}^{1/2}}{\zeta^{3/2} B^{1/4}} ; d > L$$

$$= \frac{4.23g^2 k_B J_{c0} d}{\zeta B^{1/2}} ; d < L$$

低磁界で

$$J_{c0} = A \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]^m B^{\gamma-1}$$

不可逆磁界

$$B_i^{(3-2\gamma)/2} = \left(\frac{K}{T} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]^m ; d > L$$

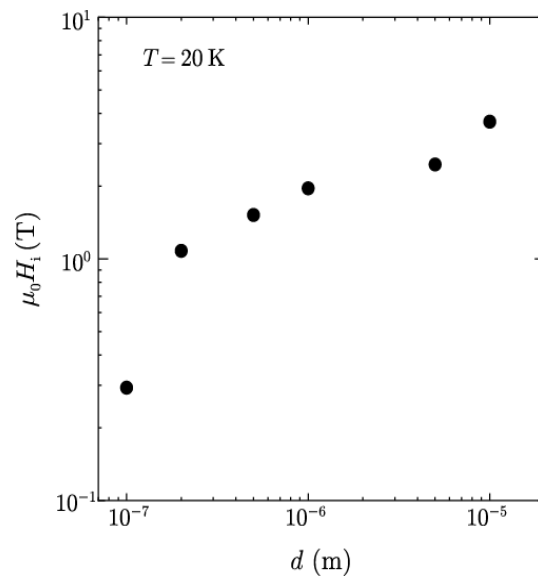
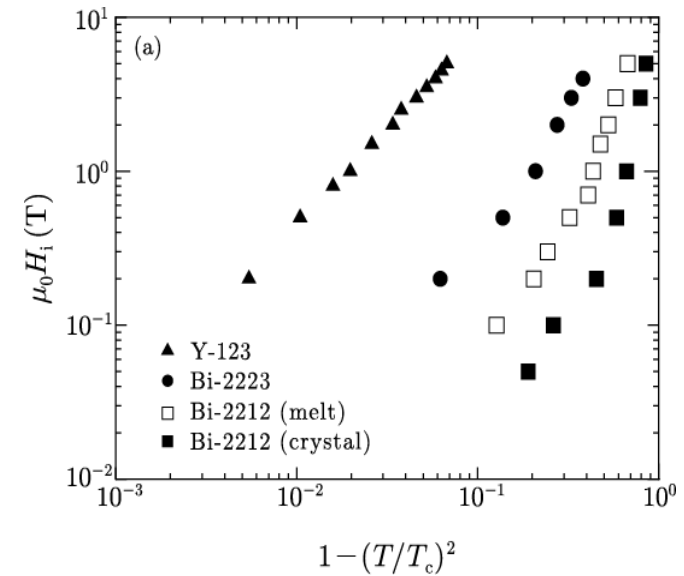
$$= \frac{K'}{T} \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]^m ; d < L$$

$$K = \frac{0.835g^2 A^{1/2}}{\zeta^{3/2} \log(Ba_f v_0 / E_c)}$$

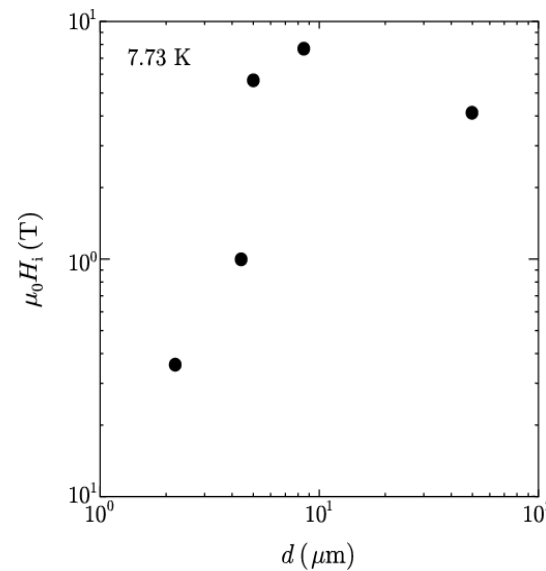
$$K' = \frac{4.23g^2 Ad}{\zeta \log(Ba_f v_0 / E_c)}$$

不可逆磁界の各種依存性

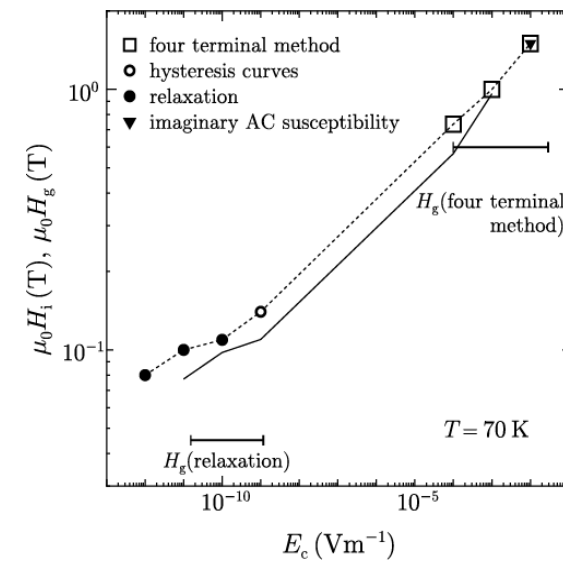
- **温度**依存性 (不可逆曲線)
- **ピンカ**依存性
ピンの種類に対する依存性
- 超伝導体の**異方性**に対する依存性
- 超伝導体の**サイズ**に対する依存性
- **電界の強さ**に対する依存性



(Bi-2212)

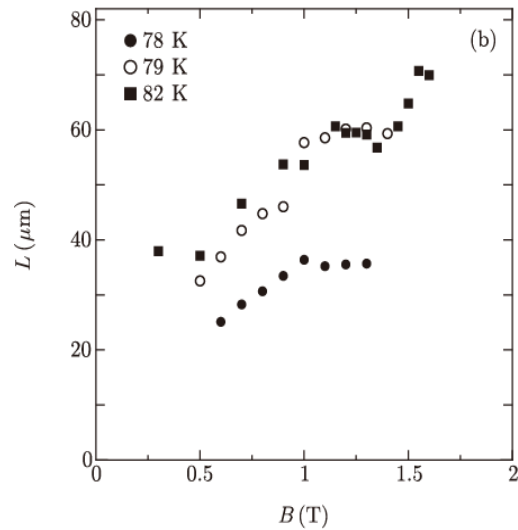
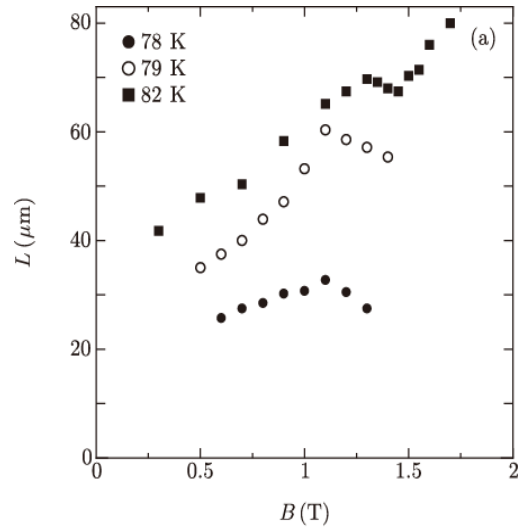


(Sm-123)

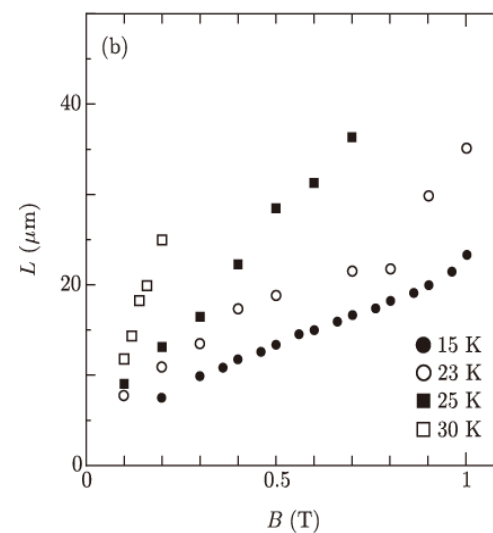
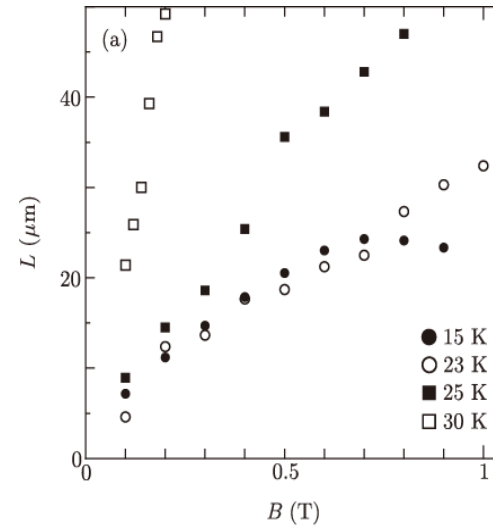


(Bi-2223テープ)

磁束の長さ方向のピンニング相関距離



Y-123



Bi-2212

$$l_{44} = \left(\frac{B a_f}{2\pi\mu_0 J_c} \right)^{1/2}$$

a_f : 磁束線間隔

長さ方向に強くカップリングして、異方性の影響はない

磁束バンドル中の磁束線数: C_{66} が求まらないので未知
 エネルギー散逸極小(磁束クリープ下の J_c が最大)の条件

$$g^2 = g_e^2 \left[\frac{5k_B T}{2U_e} \log \left(\frac{Ba_f v_0}{E_c} \right) \right]^{4/3}$$

$$g_e^2 = \frac{C_{66}^0}{\alpha_L a_f^2}$$

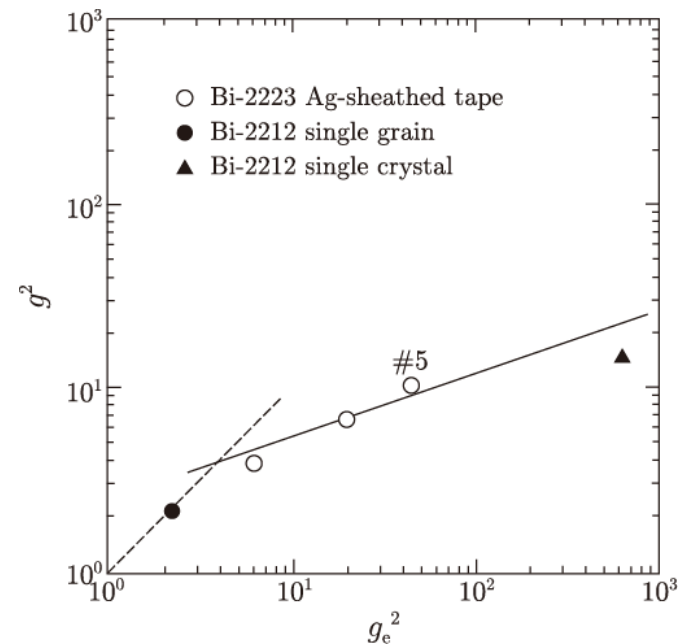
$$C_{66}^0 = \frac{B_c^2}{4\mu_0 B_{c2}} B \left(1 - \frac{B}{B_{c2}} \right)^2$$

$$U_e = U_0 (g = g_e)$$

完全な三角格子の剪断定数

最初の導入: 異方性が大きいBi系
 超伝導体の U_e が大きすぎる

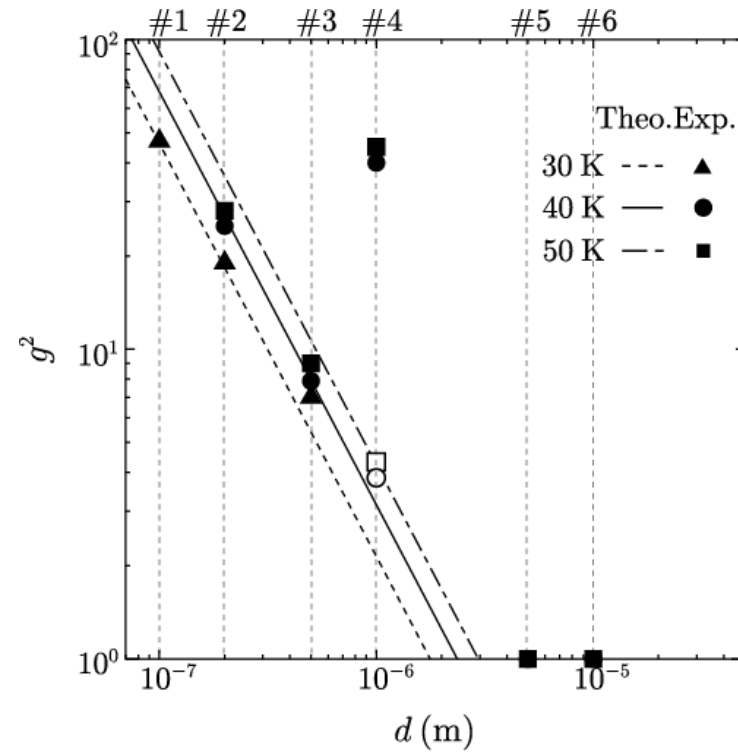
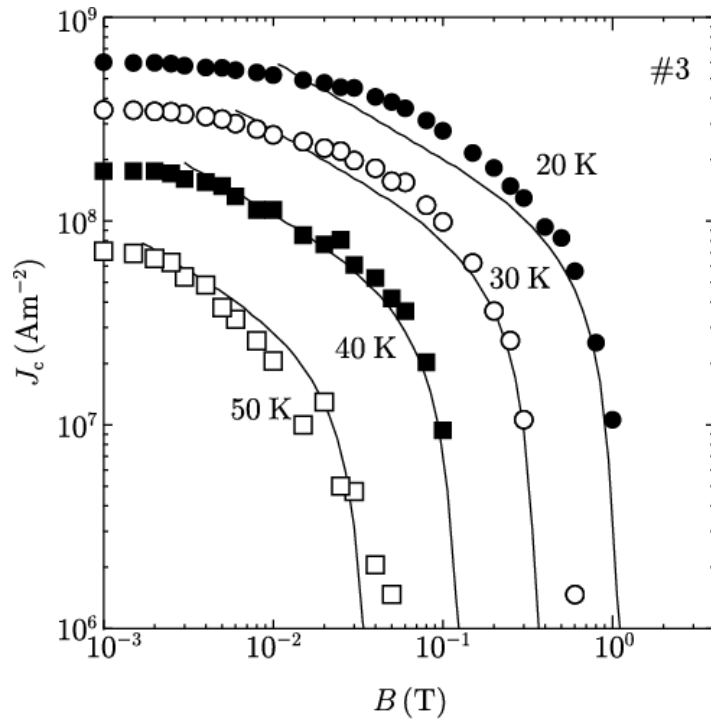
不可逆磁界の値を定量的に説明



次の問題： Bi-2212超伝導体薄膜のc軸方向の不可逆磁界が説明できない
 (バルク同様 $g^2=1$ を仮定すると低すぎる)

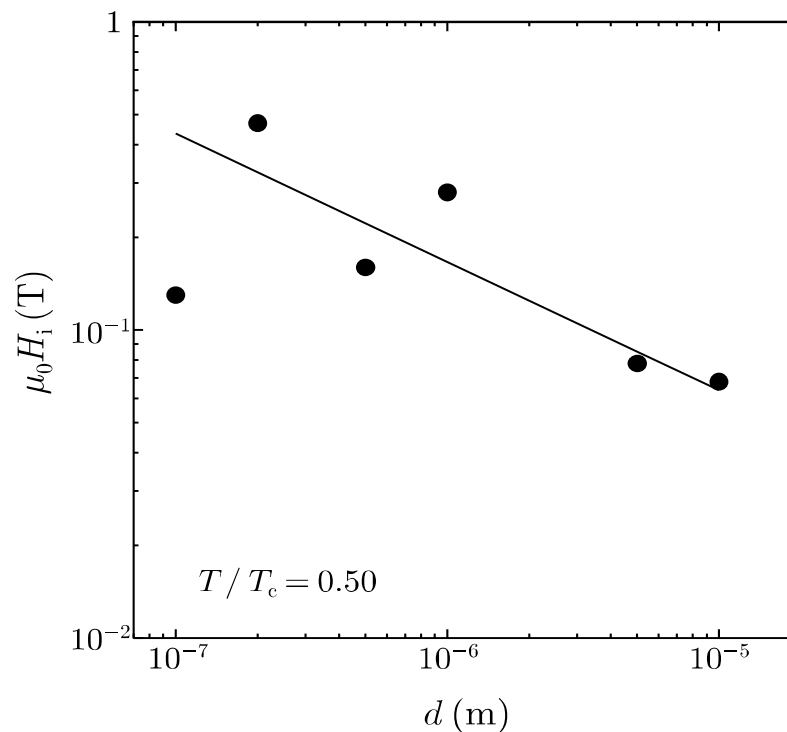
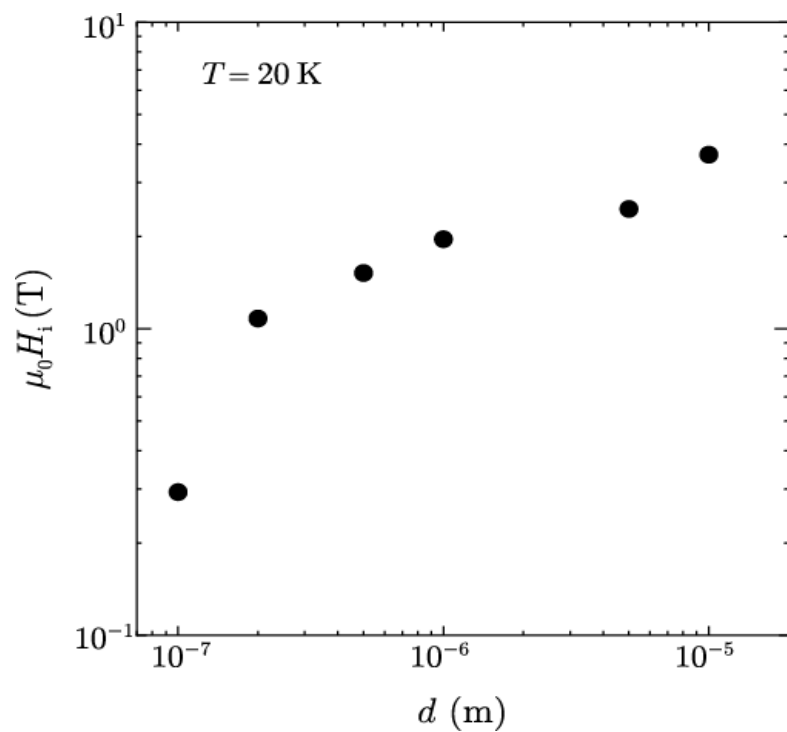
g^2 を調整パラメーターとして使用

$$g^2 = g_e^2 \left[\frac{5k_B T}{2U_e} \log \left(\frac{Ba_f v_0}{E_c} \right) \right]^{4/3} \propto \left(\frac{T}{d} \right)^{4/3} \quad U_e \propto d$$



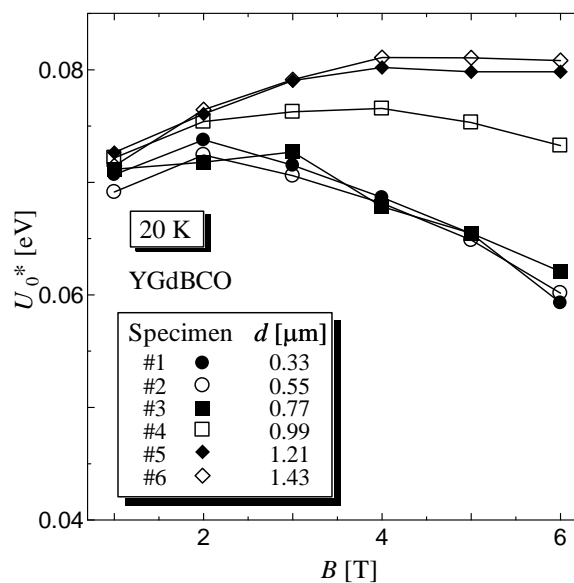
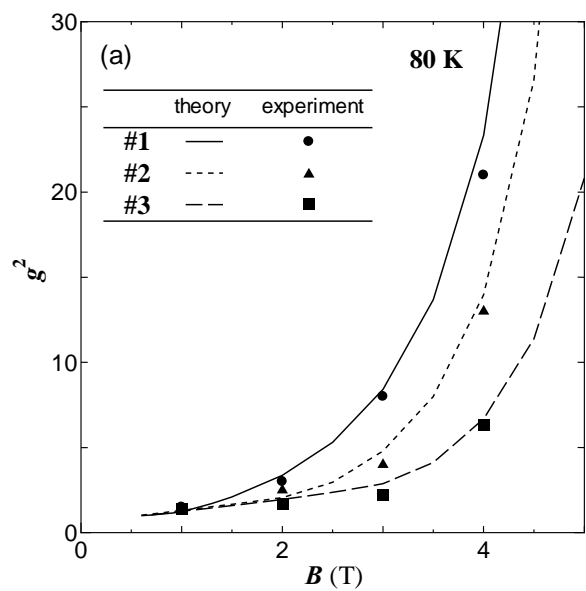
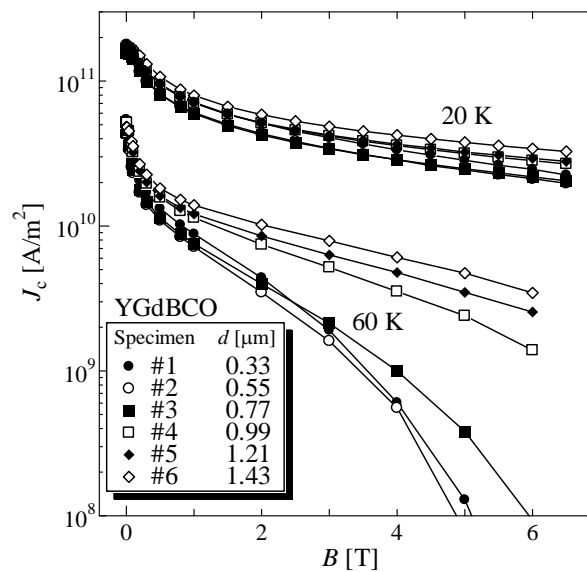
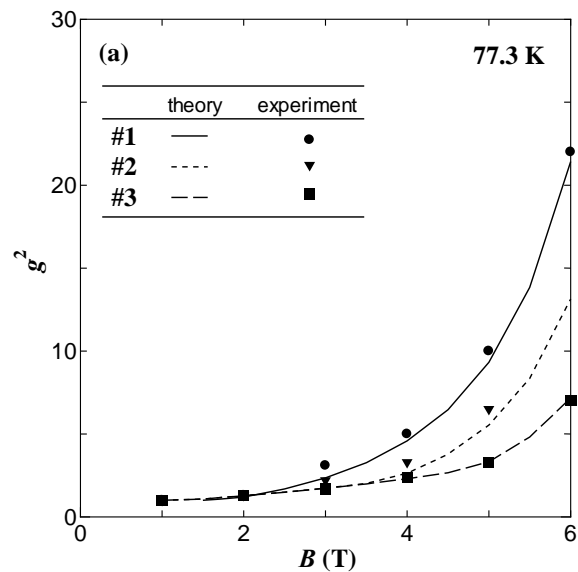
高温における Bi-2212 の不可逆磁界の逆の超伝導層厚依存性も説明

高温では2次元ピンニングとなり $B_i \propto d^{-1/2}$



Bi-2212 の B_{c2} が非常に高かったことが幸い
 B/B_{c2} が小さく、磁界依存性を考慮せずにした

RE-123 コート線材: g^2 は厚さ、温度以外に磁界によっても変化



J_c 特性、磁化の緩和特性を説明

g^2 の磁界角度異方性について

$$g_e^2 = \frac{B_c^2}{4\mu_0\alpha_L a_f^2 B_{c2}} B \left(1 - \frac{B}{B_{c2}}\right)^2$$

ピンニング (J_{c0} や α_L) に異方性がない場合、 B_{c2} に比べて十分低磁界であれば

$$g_e^2 \propto B_{c2}^{-1}$$

$$U_e \propto g_e^2 \quad \text{かつ} \quad g^2 \propto g_e^2 U_e^{-4/3}$$

$$\Rightarrow g^2 \propto g_e^{-2/3} \propto B_{c2}^{1/3} \propto \gamma_a^{1/3} \quad \gamma_a : \text{異方性パラメーター}$$

	g_c^2	g_{ab}^2	$(g_{ab}^2/g_c^2)^3$
Bi-2212(単結晶)	1	14	2700
Bi-2223(テープ)	1.4	4	23.3
Y-123(バルク)	4.3	6	2.7

現在、まだ理論は進行中： 次の世代に期待

2.5. 超伝導電力ケーブル

縦磁界効果の工学的応用

臨界電流密度の大幅な増加

自己磁界による交流損失の減少

電力輸送に有効！

従来の技術との根本的な違い

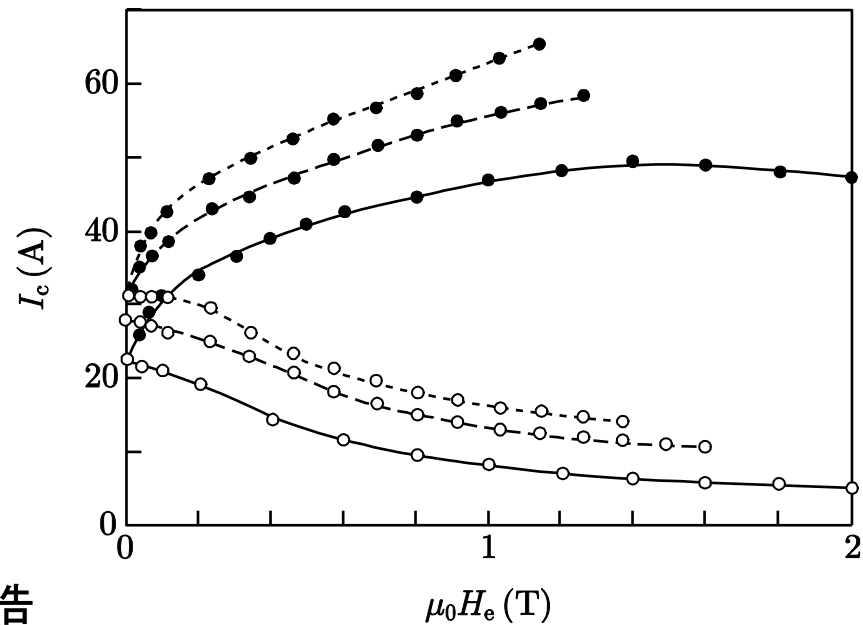
縦磁界を積極的に作るケーブル構造

とする

縦磁界効果を用いた場合の利点

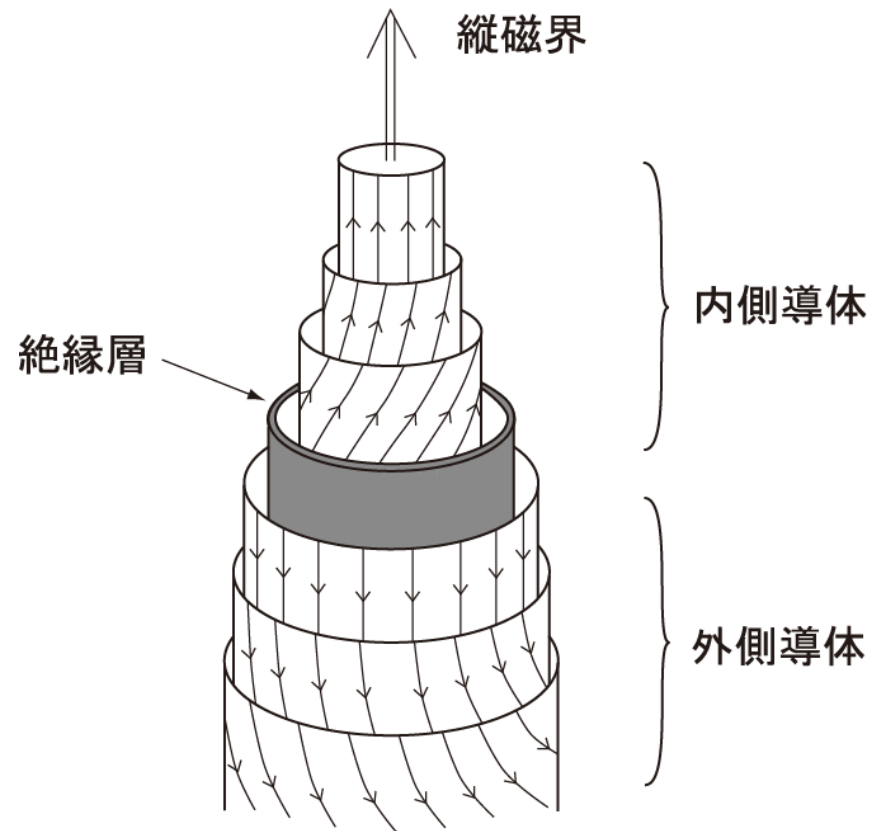
縦磁界が強いほど効果が現れる

大電流送電により有効

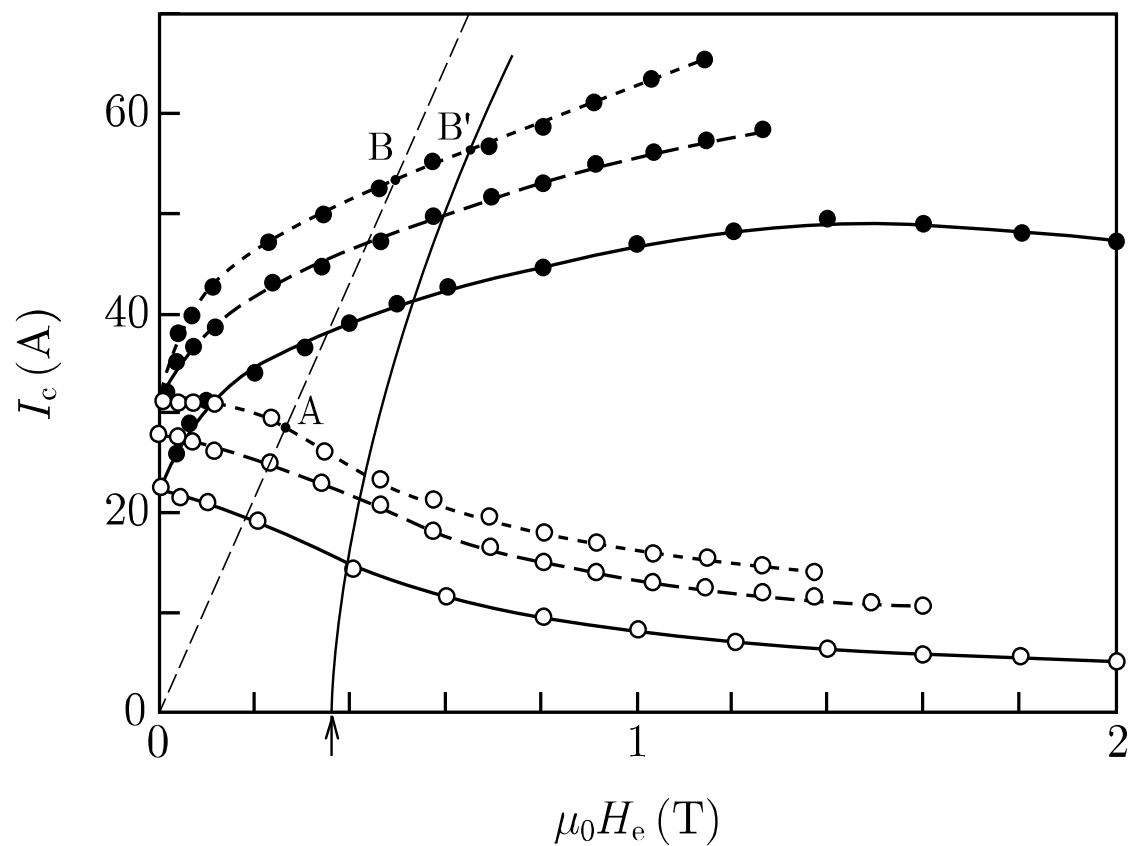


Cullen and Novak (Nb_3Sn , 1964)

外側のシールド層を含めて**縦磁界**を極力強める構造
局所的に線材方向と磁界の方向が平行な**force-free状態**を実現
(薄肉超伝導円筒のforce-free状態を参考)



シールド層による縦磁界の効果



使用する超伝導線材量を大幅に削減できる
(コンパクトな超伝導ケーブルの実現)

極めて大きな経費節減効果

超伝導線材の使用量を30%削減可能

エネルギー・地球環境問題解決技術の一つ

それ自体が節電技術(高効率)

自然エネルギー(太陽光、太陽熱、風力)の利用促進

GENESIS計画など

縦磁界効果の新たな応用の可能性

3. まとめ

- (1) 磁束ピンニングの加算問題に取り組み、動的理論を提出し、統計的加算理論との一致を示し(エルゴード性の証明)、さらにランダム系の平均場近似としてcoherent potential近似理論を提出した。これにより加算問題に関する統一理論を完成した。
- (2) 初等電磁気学に超伝導体の完全反磁性(Meissner効果)を導入し、電気現象と磁気現象の対応を高め、現在の E - B 対応をより完全にすることができた。
- (3) 経験的なOhmの法則が成り立たない超伝導体においては電流は純粹に物理的な法則によって決定するが、これを与える従来の臨界状態モデルの基本式を変分原理により導き、加算問題に関する理論と合同することにより新たに臨界状態理論として確立した。
- (4) 特殊な電磁現象を示す縦磁界効果を解明し、電流が磁束に平行に流れるforce-free状態の歪を緩和するforce-freeトルクを導出し、これらの特殊な電磁現象がトルクによる回転運動に起因することを明らかにした。

- (5) 磁束クリープ理論を展開し、磁束ピンニング特性に及ぼすピンニングの強さ、異方性、電界の強さ、超伝導体サイズに対する依存性を総合的に説明した。とくに特性を大きく左右する磁束バンドル中の磁束線の数 g^2 が不可逆熱力学の法則に従って決まることを明らかにした。
- (6) 縦磁界効果を応用した高性能超伝導電力ケーブルを考案し、従来方式に比べて大幅に特性が改善することが明らかになった。

学生諸君へのメッセージ

- 視野を広げる
- 直感から得られる物理的概念を大切に
- 多角的な見方ができるように
- それを支持する学力を備える
- 固定概念に縛られない