

# Force-freeトルクと縦磁界効果 — 超伝導体内の電磁現象 —

大学院情報工学研究院

松下 照男

2009年6月17日

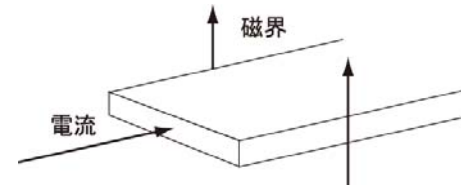
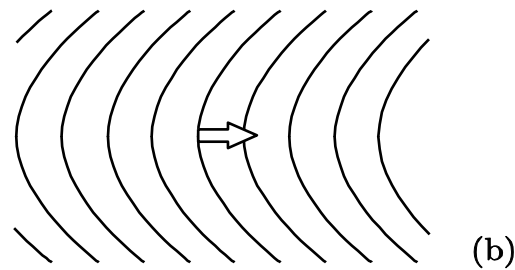
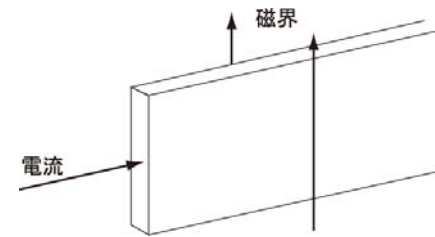
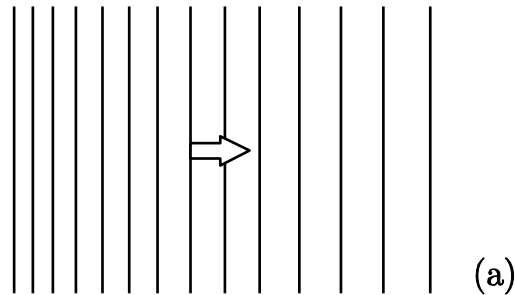
# 内 容

- ・はじめに
- ・横磁界下の電磁現象
  - 通常を超伝導体内の電磁現象
- ・縦磁界下の電磁現象
  - 従来の考え方
  - 新しい考え方
- ・超伝導と電磁気学
- ・まとめ

# 1. はじめに

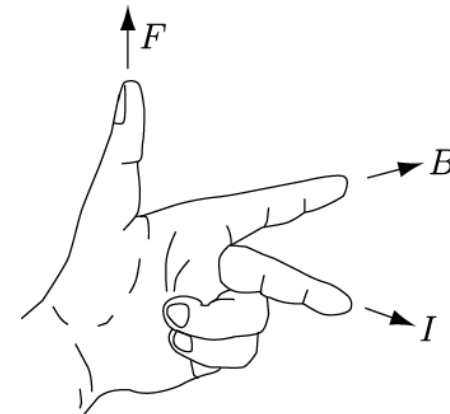
通常の横磁界下の超伝導体に電流を流す場合

磁束に歪が生じ、復元力 (**Lorentz力  $J \times B$** ) が働く (**金属でも同様**)



$J$  は電流密度、 $B$  は磁束密度

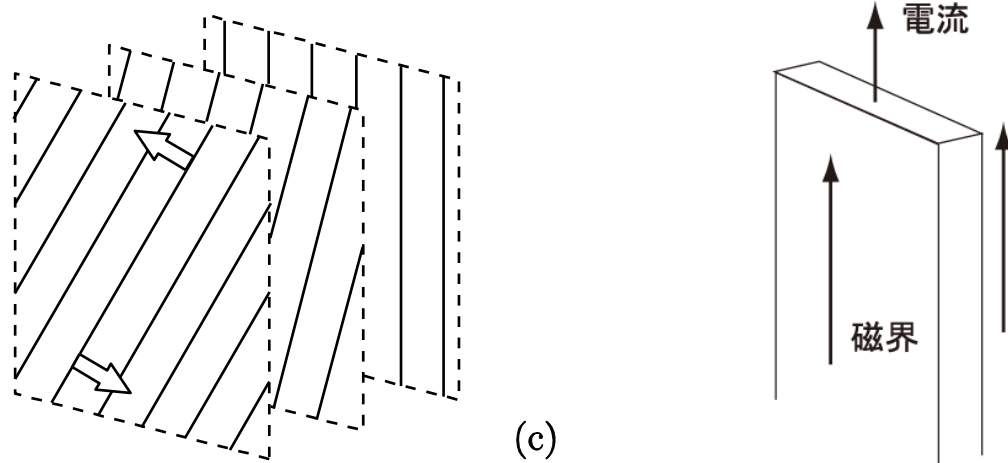
**Flemingの左手の法則**



縦(平行)磁界下の超伝導体に電流を流すと

磁束にツイストしたような歪(force-free歪)

⇒ 歪を開放するトルク(force-freeトルク)の存在が予想



Force-free状態(磁束と電流が平行)

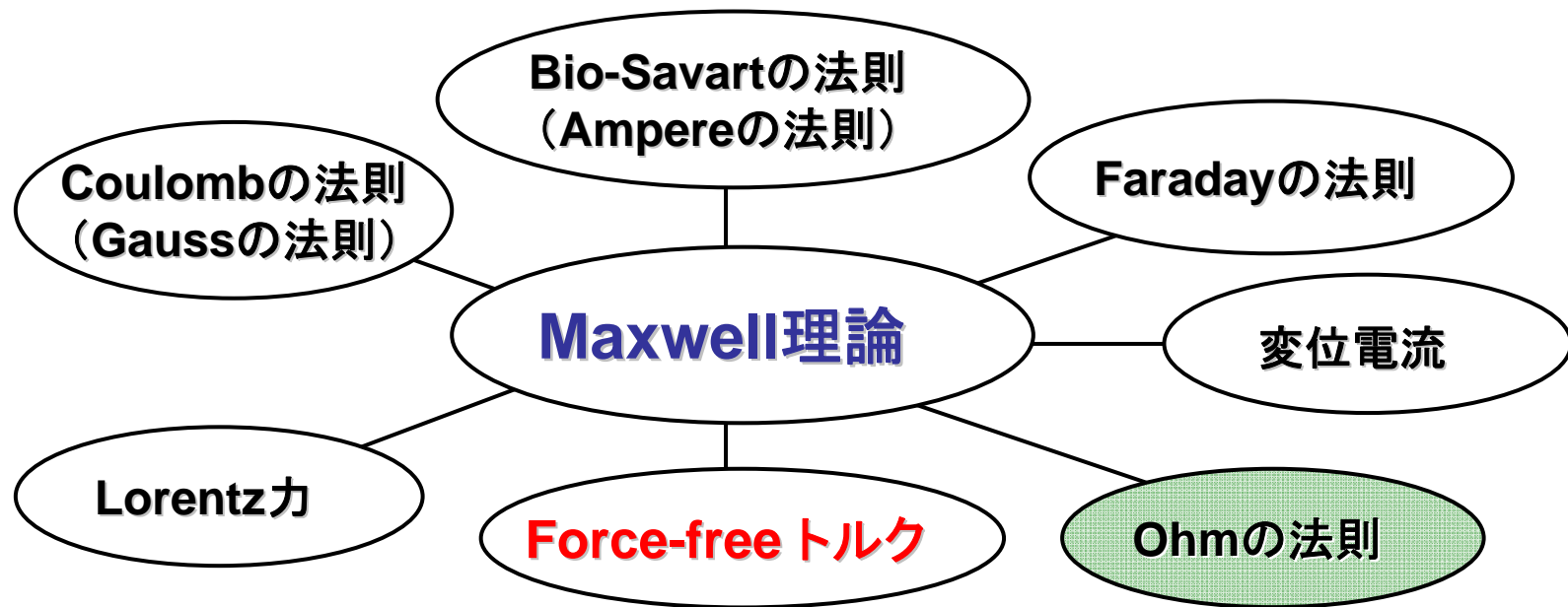
⇒  $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$  (Lorentz力は働かない)

Maxwell理論に基づき、force-freeトルクを導出

トルクが力の存在によらないというのは力学にない新しい現象

# Force-freeトルク

Lorentz力に続く**第二の磁気力**で、電磁気学における基本法則の一つであり、Maxwell理論の完成(1864)後も百数十年発見されなかった



Ohmの法則は別(単なる経験則)

## これまでに発見されなかった理由

- ・他の法則とは独立
- ・ **Ohmの法則**が成り立たない**超伝導体**でないと force-free状態にならない
- ・ 内力であるため、磁束間でトルクが打ち消しあう

その存在を直接証明できないため、**縦磁界効果**の説明を通して間接的に証明する必要

ここでは

- 横磁界下の超伝導体内の電磁現象  
量子化してはいるが、磁束の運動による一般的な電磁現象
- 縦磁界下の超伝導体内の電磁現象  
横磁界下とは違った特殊な現象  
従来の考え方と新しい捕らえ方  
Force-freeトルクの導出と縦磁界効果の説明
- 超伝導現象と電磁気学（基礎から先端科学まで）  
Ohmの法則が成立しないため、電磁気学の基本原理が表に出てくる

## 2. 横磁界下の超伝導体の電磁現象

電流を流すと、内部の量子化磁束にLorentz力  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$

⇒ もし、磁束が速度  $\mathbf{v}$  で動けば、誘導電界が生じる

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v} \text{ (Josephsonの式)}$$

⇒ 常伝導電子が駆動され、電気抵抗が生じる

超伝導体に電気抵抗なしに電流を流すには …

欠陥により磁束の動きを止める必要(**磁束ピンニング**)

**臨界電流密度**(電気抵抗なしに流せる最大電流密度)は  
Lorentz力とピン力との釣り合いにより決まる



# 臨界状態モデル

Lorentz力とピン力との釣り合いを仮定

⇒ 超伝導体( $x \geq 0$ )内の磁束分布と電流分布

$$B(x) = \mu_0(H_0 \pm J_c x)$$

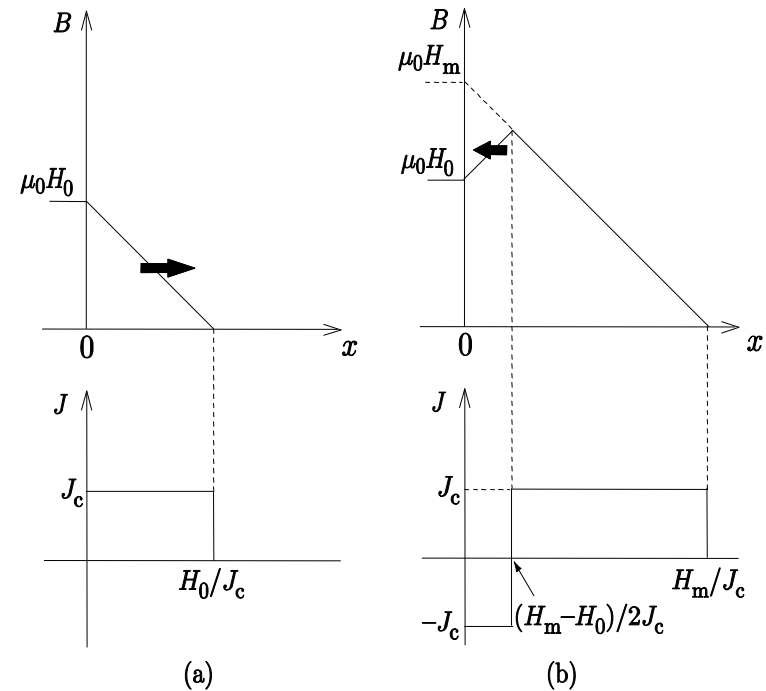
$H_0$ : 外部磁界

$J_c$ : 臨界電流密度

外部磁界が同じでも履歴によって分布が異なる: ピンニング現象による**不可逆性**  
(ピン力の向きは磁束の動きと反対側)

電流の流れ方: 金属と異なる

電流通電による自己磁界の場合も同様



## 外部磁界が変化

⇒ 内部の磁束分布の変化

⇒ 誘導電界

⇒ 損失パワー密度

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{J} = (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$$

Lorentz力による仕事率(単位体積)

(力学との類似性)

Ohmの法則が成立する金属内の電磁現象とは異なるが、Lorentz力など、知られた電磁気学の法則が成立し、また、力学との対応も成って、従来からの知られた概念で説明できる。

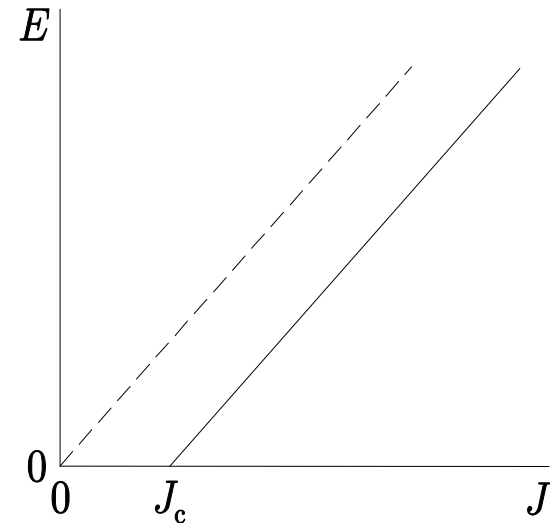
## 抵抗状態 ( $J > J_c$ )

Lorentz力がピンカを上回り、不安定運動(磁束フロー)

この場合もJosephsonの式が成立

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v}$$

定常状態であって  $-\text{grad } \phi$  の形に書けても、通常の金属のような抵抗による電圧降下によるものではなく、誘導電界



### 3. 縦磁界効果と従来の考え方

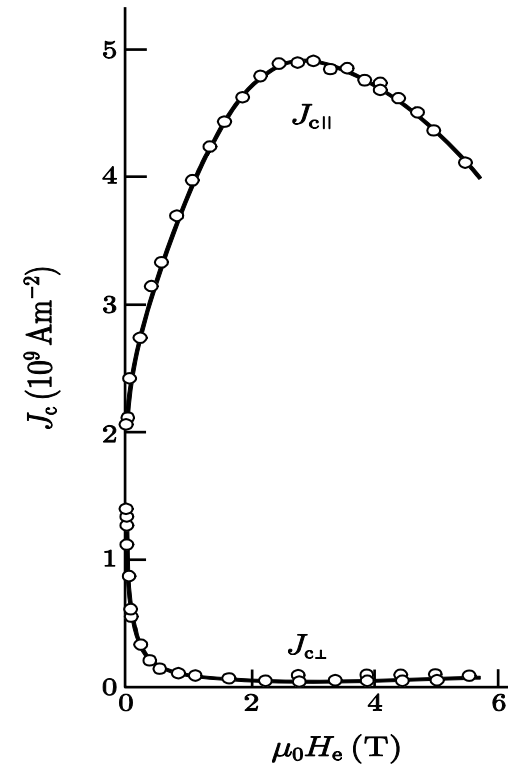
#### (a) 臨界電流密度 (静的状態)

通常の横磁界下と比べて**大幅に増加**

Force-free状態 (磁束と電流が平行) になって、Lorentz力が働かないので、大電流を流せる

Bychikov *et al.*

臨界電流密度の決定機構不明



## (b)常磁性効果(準静的過程(1))

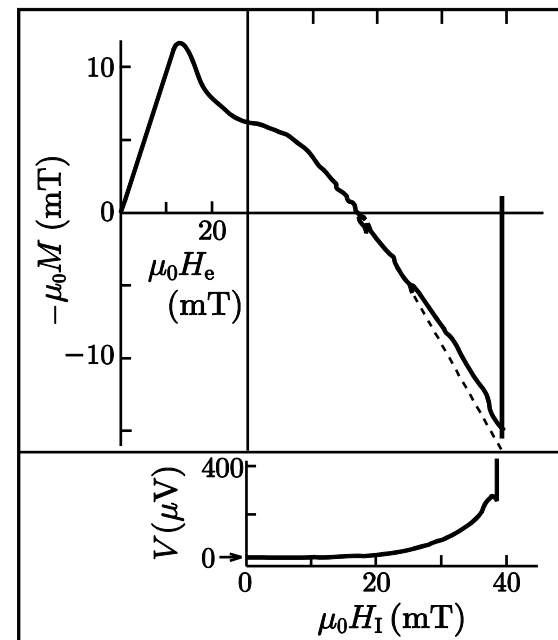
電流によって、縦方向の磁化が正になる  
(らせん状の電流)

Force-freeモデルによる説明

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$$

Force-free状態はピンがない  
超伝導体の平衡状態  
(Josephson)

問題は解決済み？



Walmsley

## (c) Josephsonの式からの外れ(準静的過程(2))

縦磁界下で直流電流に交流電流を重畳

誘導電界  $E$  は磁束密度  $B$  にほぼ**平行** (Cave *et al.*)

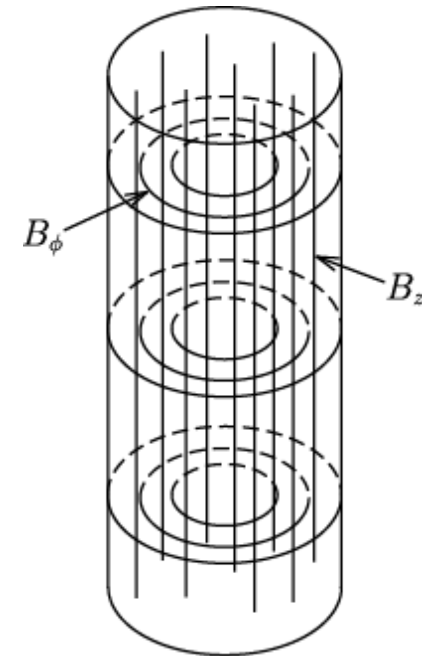
$$E \neq B \times v$$

### 磁束カッピング・モデル

電流による周方向磁束だけが侵入

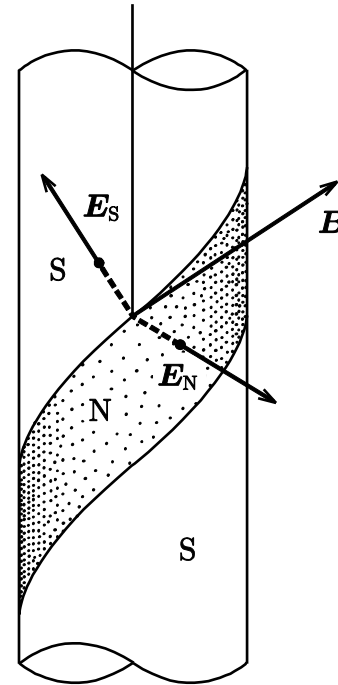
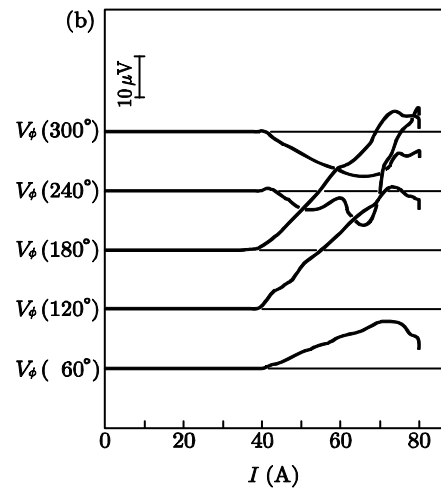
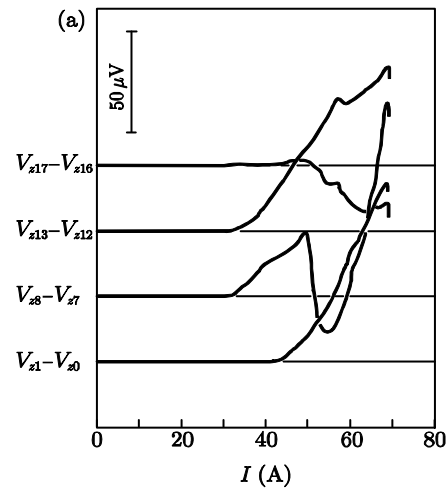
このモデルでは臨界電流密度は  
磁束カッピングの閾値

(しかし、**閾値は高すぎる**)



# (d) 抵抗状態

負の電界領域を含む表面電界構造



江崎

エネルギー生成??

## 従来の研究での縦磁界効果についての説明と疑問点

- ・臨界電流が大幅に増加し、しかもピンニングの強さに依存する(この説明は与えられておらず、**臨界電流の決定機構は不明**)
- ・常磁性効果など、現象論的に**force-freeモデル**で説明される
- ・Force-freeモデルの理論的根拠は**Josephsonによるピンがない超伝導体の平衡状態を記述する方程式**  
**実際の超伝導体ではピンがあるため、これと異なるはず。なぜforce-freeモデルが成立？**  
**また、ピンニングがなければ、臨界電流密度は0になるのでは？**
- ・Josephsonの式 $E=B \times v$ が成立しないこと(**理由は？ どのような磁束運動？**)
- ・これを説明するために**磁束カッピング・モデル**が提案された。また、臨界電流密度の起源としてカッピングの閾値を考慮(**いろいろな矛盾点。定量性も問題**)
- ・抵抗状態における表面電界構造(**説明なし**)

ピンがなくてもforce-free状態が安定であるという**Josephsonの理論**に問題があり、これに基づき、Josephsonの式からの外れと臨界電流密度の増加を説明するために提案された**磁束カッピング・モデル**も問題。表面電界構造は手付かずの状態

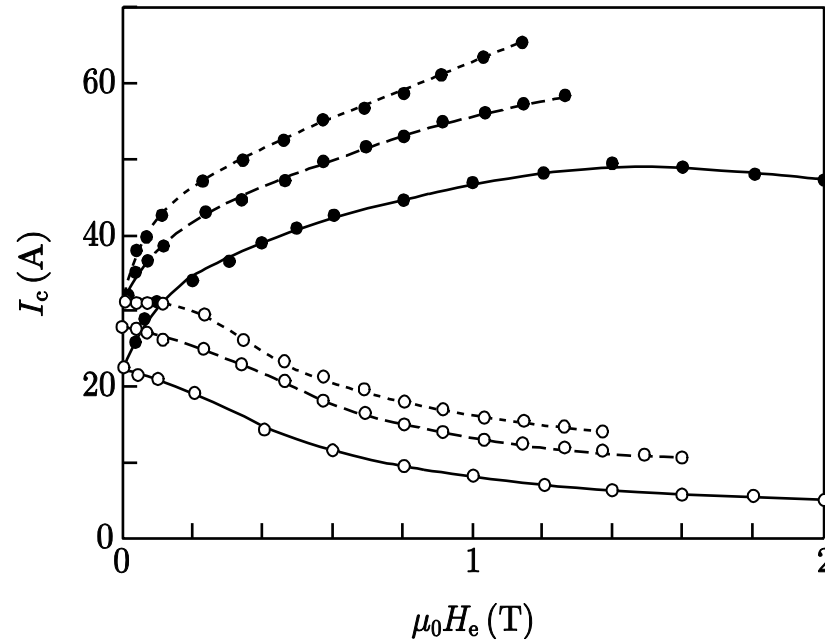


## 4. 縦磁界効果の新しい考え方

### (a) 全体像

ピンニングの強さに依存する臨界電流密度

⇒ ピンニングによる安定化なしにはforce-free状態は不安定！

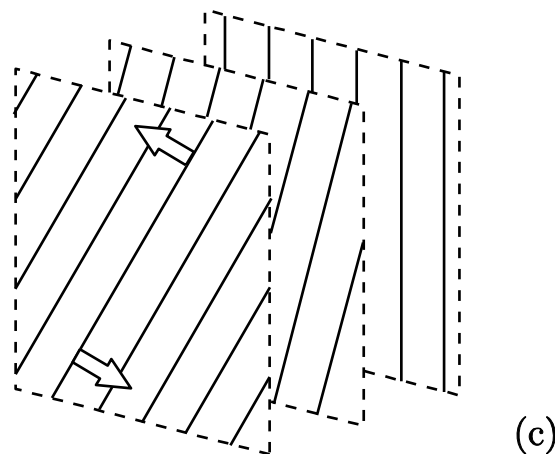


Kuren & Novak

(Josephson理論における問題)

どのような不安定現象？

⇒ Force-free状態の磁束の歪を緩和する運動：**回転運動**



(トルクの存在の示唆)

磁束の回転運動 ⇒ **Josephsonの式からの外れ**

$E$  は  $B$  にほぼ平行

$B \times v$  は回転半径に比例する一方、 $E$  は一様！

(**従来の概念** (力学系との類似性) **の打破**)

## (b) Force-free トルクの導出

### Force-free歪の導入

一様な磁束  $\Rightarrow$  外部磁界を回転

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= (B_x, 0, B_z) \\ &= (B \sin \theta, 0, B \cos \theta)\end{aligned}$$

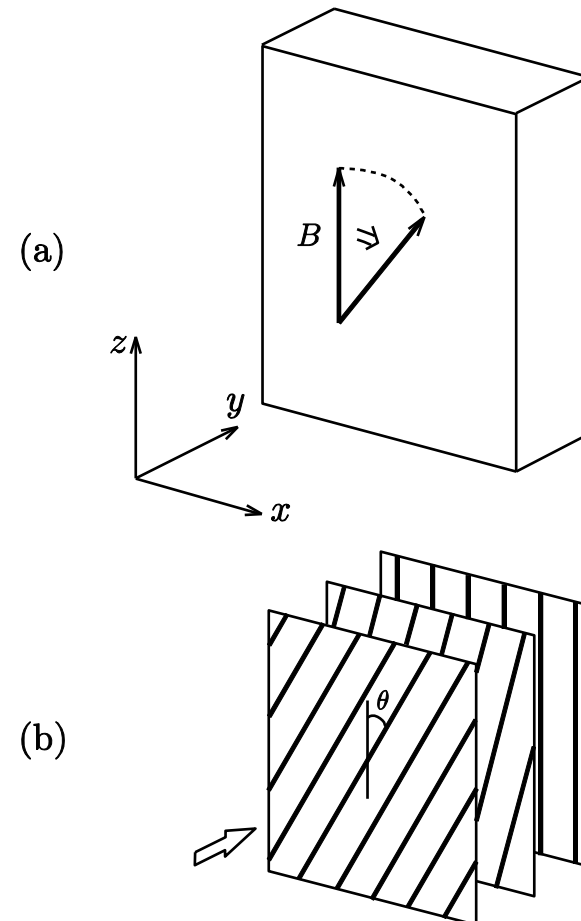
$$\theta = \theta_0 - \alpha y = \alpha (y_0 - y)$$

$y_0$ を一定に保ち、 $\alpha$ を増加

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \mu_0^{-1} \text{rot } \mathbf{B} \\ &= (J \sin \theta, 0, J \cos \theta)\end{aligned}$$

$$J = \alpha B / \mu_0$$

$\mathbf{J} // \mathbf{B} \Rightarrow$  force-free 状態



## 誘導電界

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{歪} \alpha \text{ が時間変化}$$

$$\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z); \quad y > y_0 \text{ で } \mathbf{E} = 0 \text{ (磁束分布の変化なし)}$$

$$E_x = \frac{B}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial t} (\sin \theta - \theta \cos \theta)$$

$$E_z = \frac{B}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial t} (\theta \sin \theta + \cos \theta - 1)$$

$\mathbf{E}$ : 大部分は  $B_x$  の増加を妨げようとする誘導電界で  
z 軸方向  $\Rightarrow \mathbf{E}$  は  $\mathbf{B}$  とほぼ平行

$\Rightarrow$  Josephson の式 ( $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v}$ ) からの外れ

## 表面におけるPoyntingベクトル

$$\mathbf{S} = \mu_0^{-1} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

$y$  軸の正方向 (超伝導体へのエネルギーの流れ)

入力パワー密度

$$p = \frac{B^2}{\mu_0 \alpha^2 y_0} \frac{\partial \alpha}{\partial t} [\alpha y_0 - \sin(\alpha y_0)]$$

入力エネルギー密度 ( $\theta_0; 0 \rightarrow \theta_m$ )

$$w = \int p dt = \frac{B^2}{\mu_0} \int_0^{\theta_m} \frac{1}{\theta_0^2} (\theta_0 - \sin \theta_0) d\theta_0 \cong \frac{B^2 \theta_m^2}{12 \mu_0}$$

Force-freeトルク密度

$$\Omega = \left| -\frac{\partial w}{\partial \theta_m} \right| = \frac{1}{6} B J y_0$$

## Force-freeトルクの導出に必要な学力

- ・誘導電界の計算
- ・Poyntingベクトルの理解

⇒ 大学学部2年生修了程度(電子)

## 同様にLorentz力(磁気圧、線張力)も導出できる

- ・磁界のエネルギーの増加も考慮
- ・力による仕事を求めるため、磁束の連続の式から磁束の変位量を求める必要

⇒ 大学学部4年生修了程度(電子)

H20年度の卒論(高田真弓君)

# Force-freeトルクとピンニングトルクの釣り合い

⇒ 臨界電流密度を決定

ピンニングの強さに依存する臨界電流密度を説明  
(横磁界下のLorentz力とピン力の釣り合いに対応)

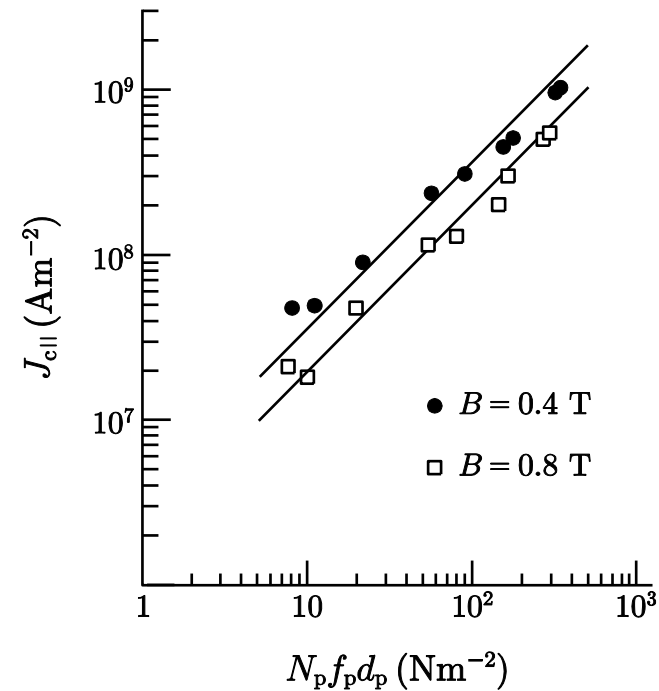
臨界電流密度がピンニング  
トルクに比例することを実証

臨界電流密度 vs ピンニングトルク密度

$f_p$ : 要素的ピン力、 $N_p$ : ピン密度

$d_p$ : ピン間隔

観測されるforce-free状態はピン  
ニングで安定化されたもの



## (c) Josephsonの理論の矛盾点の指摘

(Josephsonはピンがない場合にforce-free 状態となり、force-free 電流が安定に流れると説いた)

仮定されたゲージ ( $\delta \mathbf{A} = \delta \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ ) における問題 を指摘

( $\delta \mathbf{u}$  は磁束の変位、 $\delta \mathbf{A}$  はベクトルポテンシャルの変化)

この式は満たされない  $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v}$  と等価

(時間微分すると、左辺は $-\mathbf{E}$ に、右辺は  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ になる)

この理論が正しくなく、ピンがない場合の平衡状態では電流密度が0となることを明らかにした ( $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$ でなく、 $\mathbf{J} = 0$ )

⇒ Force-free状態の実現にはピンニングによる安定化が必要

Force-free トルクによる予言と一致



## (d) 磁束線の回転運動解の導出

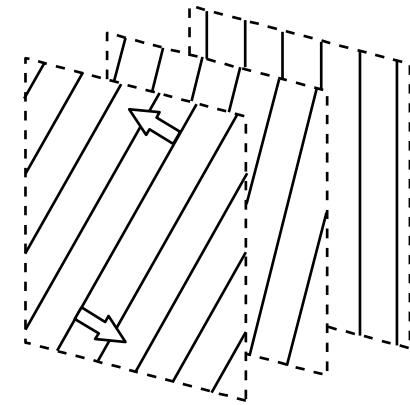
Force-free モデルで記述される磁束構造の変化の際に、磁束の連続の式から **回転運動の解を発見**

$$\text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z); \quad v_x \sim r \theta' \cos \theta, \quad v_z \sim r \theta' \sin \theta$$

$$r = (x - x_0) \sin \theta + (z - z_0) \cos \theta; \quad \text{回転半径}$$

$$(x_0, y, z_0) \text{ は回転中心, } \theta' = \partial \theta / \partial t$$



(c)

**ピンニングトルクを上回った force-free トルクにより駆動された運動**

## (e) 誘導電界

ほとんど  $\mathbf{B}$  に平行  $\Rightarrow$  **Josephson の式からの外れ** (実験結果の説明)

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v} - \text{grad } \phi \quad (\phi \text{ は静電位ではない})$$

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{J} \cdot \text{grad } \phi \quad (\text{電界の主要項は第2項})$$

## (f) 抵抗状態における表面電界構造

Force-free トルクがピンニングトルクを超えると

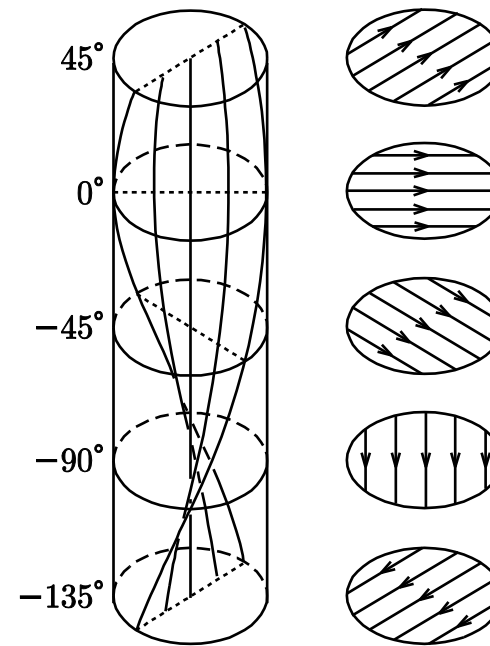
... 不安定運動 (**回転運動**: 上回ったf.f.トルクによる)

ただし、定常状態を保つために**併進運動**を誘導

... 円柱形状では **らせん磁束フロー**



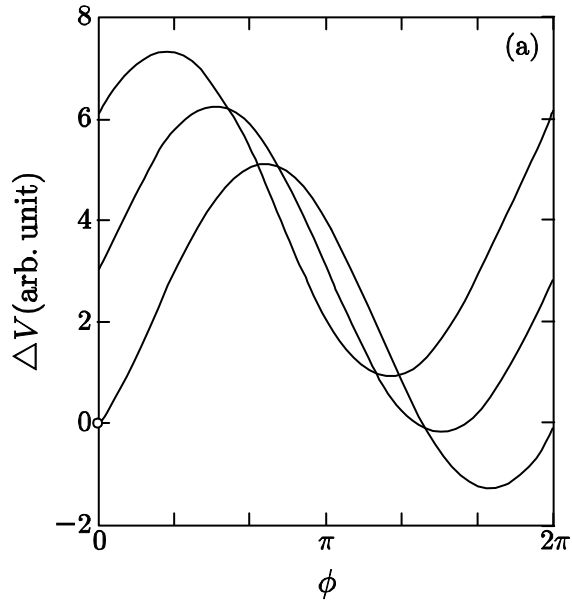
(c)



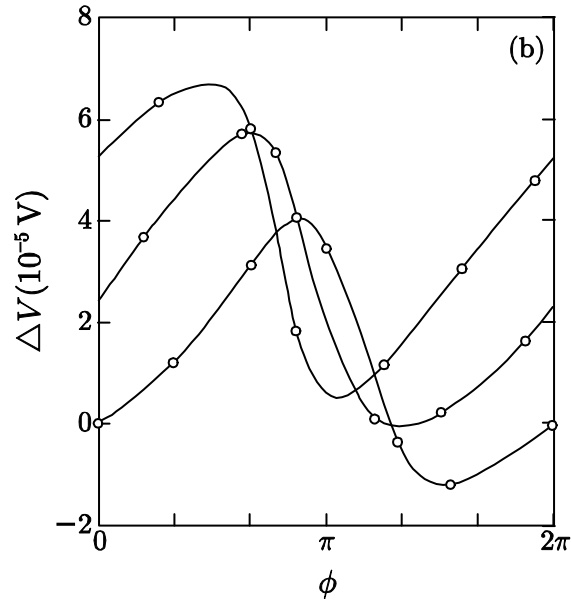
(a)

(b)

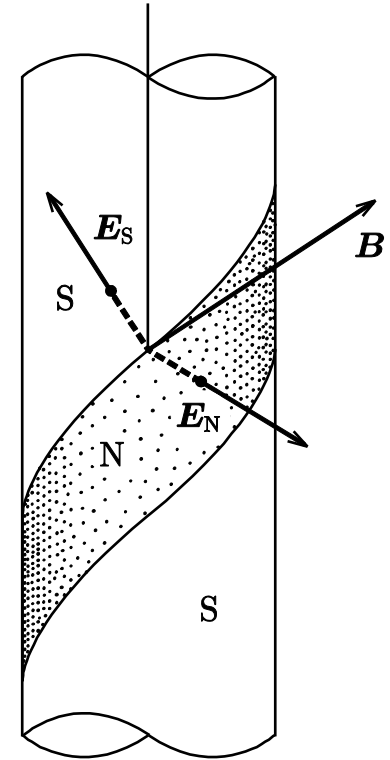
# 実験結果と理論結果の比較



(理論)



(実験: 江崎)



磁束が外に出る部分で負の電界 ( $B \times v$  の項による)

電界の損失成分は再び第二項から

負の電界領域においてもエネルギー生成はない ( $E \cdot J > 0$ )

抵抗率から磁束の縦成分が運動 (らせん磁束フローの証明)

## その他

### (a) Force-freeモデルの説明

ピンニングの影響下で力の釣り合いにピン力が現れない  
ことの説明

### (b) 磁束カッピング・モデルについて

(省略)

縦磁界効果の静的、準静的、動的状態の電磁現象を force-freeトルクおよびこれに駆動された磁束の回転運動によって総合的に説明。これによりトルクの存在を立証した。

## 5. 電磁気学と超伝導

### 電磁気学と超伝導の歴史

1785 Coulombの法則

1820 電流の磁気作用

1826 Ampereの法則

Ohmの法則

1831 Faradayの法則

1864 Maxwell理論

1911 超伝導現象の発見

1933 Meissner効果の発見

電磁気理論の完成後に登場した超伝導を加えて理論の再構成が必要

# $E$ - $B$ 対応の中での導体と超伝導体の対応

導体

超伝導体

$$E = 0$$

$$B = 0$$

$$\rho = 0$$

$$i = 0$$

$\Phi$ 一定

$A$ 一定

渦なし

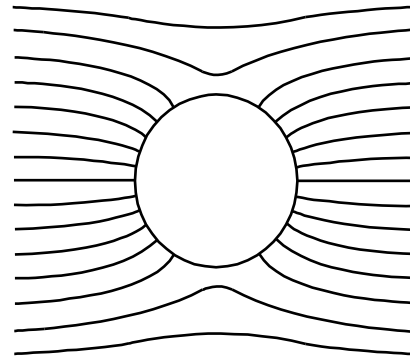
発散なし

(発散あり)

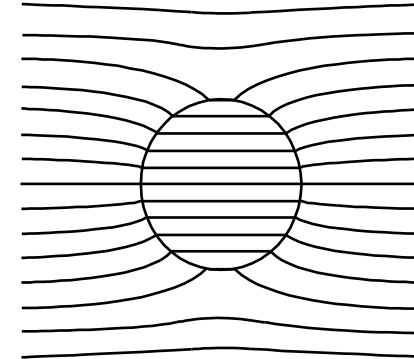
(渦あり)

真電荷が遮蔽

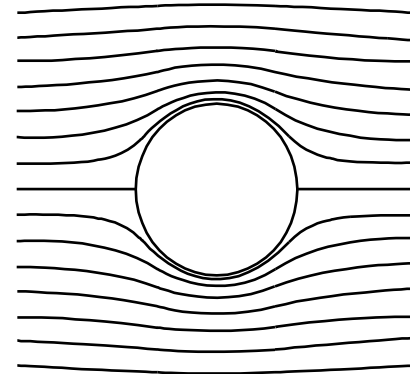
真電流が遮蔽



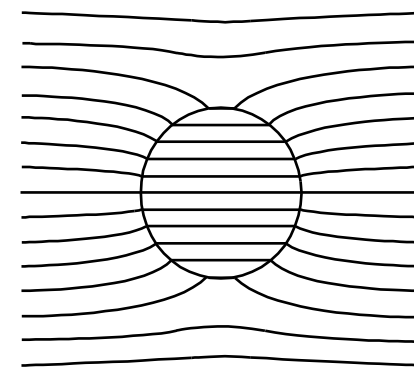
(a)



(b)



(c)



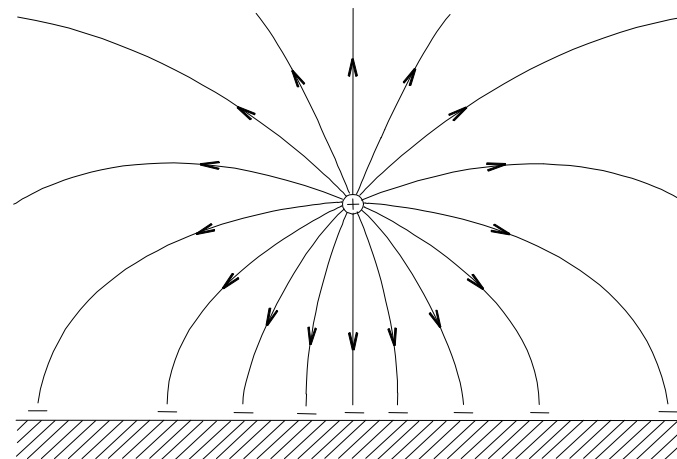
(d)

上： 一様な電界中の電束 (導体と誘電体)

下： 一様な磁界中の磁束 (超伝導体と磁性体)

導体平面( $z=0$ )上の $a$ の位置に線電荷(密度 $\lambda$ )を置いたときの電位と電気力線

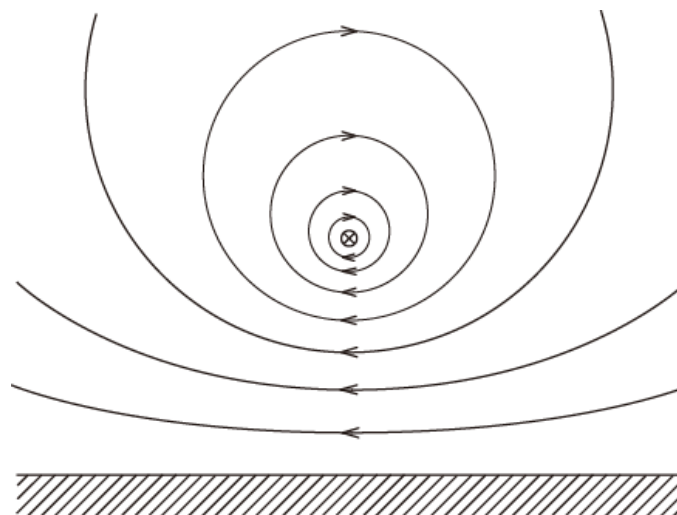
$$\phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \frac{x^2 + (z+a)^2}{x^2 + (z-a)^2}$$



超伝導体平面( $z=0$ )上の $a$ の位置に電流  $I$  を置いたときのベクトルポテンシャルと磁束線

$$A_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \log \frac{x^2 + (z+a)^2}{x^2 + (z-a)^2}$$

$$\mathbf{A} = (0, A_y, 0)$$



# 初等電磁気学への超伝導導入のメリット

- ・電気現象と磁気現象の対称性の向上
- ・孤立した磁束保存系
  - ⇒ 電磁誘導によらず、磁気力に抗した**力学的仕事から静磁気エネルギーを導出**できる  
(従来は、電磁誘導による電気エネルギーに換算してから)  
逆に、**電磁誘導の予測も可能**
- ・真電流の磁化と磁化電流の磁化の分離
  - ⇒ **磁性体の磁化との明確な区別**を通して、 **$E-B$  対応の高度化**に貢献  
(導体の静電誘導と誘電体の電気分極の関係に対応)
- ・電磁誘導に関する統一的記述
  - ⇒ **ファラデーの法則とフレミングの右手の法則の統一**  
(磁束の連続の式より磁束分布の時間変化を磁束の速度として求めることができる)



**$E$ - $B$**  対応が根本的なものであれば、電磁気学の完成直後、 **$E = 0$**  となる導体に対応して完全反磁性 ( **$B = 0$** ) を示す物質を予測しても不思議ではない。

このとき、遮蔽は輸送電流で与えられるため、永久に遮蔽が続くためには、その物質の**電気抵抗は0**でなければならない

19世紀において超伝導体の存在の予言は可能であった！  
(形式的とは言え、それくらいMaxwell理論は有効)

現実には予言した人はおらず、実験では1911年に電気抵抗が0となることが発見され、Meissner効果の発見は1933年

# 超伝導体

Ohmの法則が成立せず、電磁気学的な規則が表面に出る

⇒ 新たな現象の発見、新しい理論の誕生の可能性

- ・Maxwell応力による記述の一般化
- ・等ベクトルポテンシャル面に関する定理

.....

現状ではこうした活動分野が学会にない

(それぞれの専門分野に特化)

## 6. まとめ

磁束に平行に電流が流れる場合、磁束構造にforce-free歪が生じ、この歪を開放するようにforce-freeトルクが働くことをMaxwell理論から明らかにした。

その結果、臨界電流密度はforce-freeトルクとピンニング・トルクの釣り合いで与えられ、変動磁界下等で生じる縦磁界効果の特異さは余剰なforce-freeトルクによる磁束の回転運動に起因することが示された。こうした事実からforce-freeトルクの実在が証明された。

超伝導現象は物性物理にだけ大きな影響を与えたのではなく、Ohmの法則から外れることから、古典的な電磁気学にも大きな影響を与えるものである(初等電磁気から最先端まで)。

# 学生諸君へのメッセージ

- 視野を広げる
- 直感から得られる物理的概念を大切に
- 多角的な見方ができるように
- それを支持する学力を備える
- 固定概念に縛られない