

電磁気学と超電導

電磁気学, 超電導, 完全反磁性, 磁化, 磁気エネルギー



松下 照男

1. はじめに

超電導体は1911年に発見され、物理学的にはよく知られた物質である。一方で、超電導の応用には磁気浮上式鉄道やMRIなどがある。また、1986年に高温超電導体が発見されてからは高校の物理の教科書で紹介されるようになり、一部ではあるが一般の電磁気学の教科書にも超電導体が登場するようになった。しかし、大半はその位置付けは低温で生じる特異な現象としてであり、超電導体の本質である完全反磁性をきちんと取り入れ、 E - B 対応の中で導体の電気現象と対応させたものはなかった。

超電導体の磁気的特性と導体の電気的特性を比較すると、その形式的な対応が存在することが明確になる。実際に超電導体の完全反磁性 ($B = 0$) は導体の完全な静電遮へい ($E = 0$) に対応し、発散のない場と渦のない場の違いはあるが、現在の E - B 対応の中で極めて強い対応を示す。一方、誘電体と磁性体にはよく知られた類似性がある。このように超電導体を組み込むことにより電気材料と磁気材料の対応がより明確になり、静電磁気学の効率的な教育が図れると思われる。

以上の理由から、超電導体を電磁気学的な物質として取り上げ、主として超電導体の静磁気現象である完全反磁性について解説する。

2. 超電導体の磁化特性

超電導体はその磁化特性の違いにより第1種と第2種に区別される。図1(a)のように臨界磁界 H_c まで完全反磁性を示し、外部磁界 H_e に対して磁化が $M = -H_e$ となる

ものを第1種超電導体といい、これに対して図1(b)のように完全反磁性が下部臨界磁界 H_{c1} までのものを第2種超電導体という。後者の場合、 H_{c1} から上部臨界磁界 H_{c2} までの間は超電導状態ではありながら、内部には磁束が量子化した形で侵入しており、この状態を混合状態という。なお、図1の特性は超電導体の形状効果が現れない(反磁界係数が0)場合のものである。

超電導体はこうした完全反磁性という特性以外に「完全導体」としての側面も持つ。ここで、この二つの特徴のどちらが超電導体の本質であるかを明らかにしよう。まず超電導体の温度を下げて超電導状態にした後、磁界をかけた場合、図2(a)のように完全反磁性状態となるが、これはどちらの性質によっても説明される。すなわち、前者は磁界の存在を嫌うが、後者の場合、磁界が内部に侵入しようとすると誘導起電力が生じるために遮へい電流が流れるからである。つまり、完全導体は変化を嫌うのである。次に、室温のまま先に磁界をかけたときは図2(b)のように磁界は超電導体に侵入するが、この状態で冷却して超電導状態にすると完全反磁性により磁束は図2(a)のように外部に排除される。一方、完全導体であればこの場合、図2(b)の状態が保たれることとなり、実際とは異なる。よって、超電導体の本質は完全導体ではなく完全反磁性体である。

超電導体が完全反磁性となるのは、超電導状態となることによるエネルギーの減少分(凝縮エネルギー)が磁束を追い出すのに要するエネルギーの増加分を上回るからである。詳細は文献(1)を参考されたい。

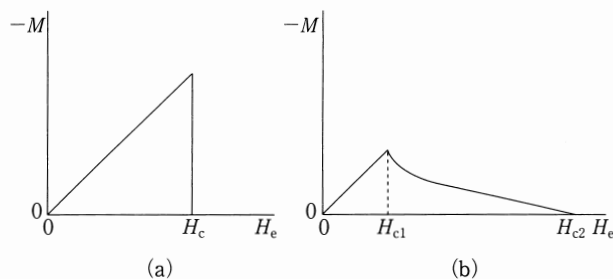


図1 (a) 第1種および (b) 第2種超電導体の磁化

まつした・てるお (正員) 1972年3月九州大学大学院工学研究科電子工学専攻修士課程修了。1973年5月九州大学工学部電子工学科助手, 1980年6月同助教授, 1990年4月九州工業大学情報工学部電子情報工学科教授, 2008年4月九州工業大学大学院情報工学研究院電子情報工学研究系教授, 現在に至る。超電導体における磁束ピンニングと電磁現象に関する研究に従事。低温工学協会会員, 応用物理学会会員, 日本物理学会会員, 英国物理学会会員。工学博士。

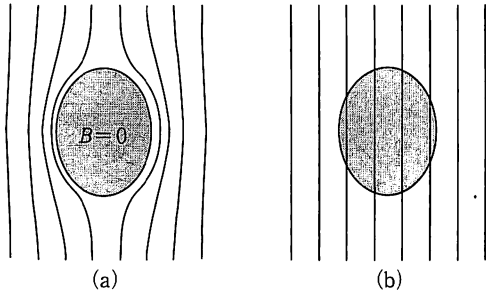


図2 (a) 超電導状態および (b) 常電導状態での磁束線

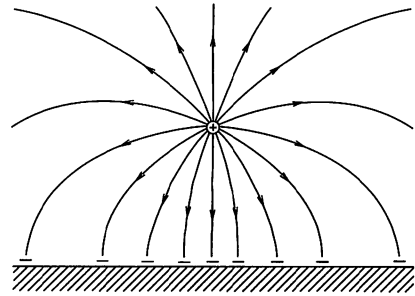


図3 線電荷と導体平面の間の電気力線の様子

3. 導体と超電導体の対応

静的状態において導体内部に電界は存在せず ($E = 0$)、内部の電荷密度は0となる ($\rho = 0$)。したがって、導体に電荷が存在したとしても、それは表面に限られる。また、導体内では等電位となる ($\phi = \text{一定}$)。導体に外部から電界を加えたとき、表面に電荷が現れ、内部の電界を0とする。これを静電遮蔽という。このとき、導体表面において電界は表面に垂直であり、その強さ E は表面電荷密度 σ と $E = \sigma/\epsilon_0$ の関係にある。

完全反磁性状態にある超電導体は静的状態を含めて内部に磁束密度が存在しない物質として定義される。

$$B = 0 \dots\dots\dots (1)$$

そしてアンペールの定理 $\mu_0^{-1} \text{rot} B = i$ (μ_0 は真空の透磁率) より、内部の電流密度は0となる。

$$i = 0 \dots\dots\dots (2)$$

したがって、超電導体に電流が存在したとしても、それは表面に限られる。そして(1)式から、超電導体内のベクトルポテンシャルはスカラー関数 α を用いて $A = \text{grad} \alpha$ のように与えられる。ただし、超電導体の内部を磁束が貫通しない場合は

$$A = \text{一定} \dots\dots\dots (3)$$

とすることができる[†]。

超電導体に外部から磁束密度(磁界)を加えたとき、表面に電流が流れ、内部の磁束密度を0とする。これが完全反磁性の機構である。このとき、超電導体表面において磁束密度は表面に平行であり、その強さ B は表面電流密度 τ と

$$B = \mu_0 \tau \dots\dots\dots (4)$$

の関係にある。これらの(1) - (4)式は導体の特性にそれぞれ対応する。

[†]磁束が超電導閉路を貫く場合、 α は閉路に関して多価関数となり、一周するごとに磁束に比例する量だけ増加する。

このように超電導体における静磁気現象は導体における静電気現象と極めてよく対応する。異なる点はその現象の源となる電荷密度がスカラーであるのに対して電流密度がベクトルであることと、表面における電界と磁束密度の方向が異なることである。前者の違いによりポテンシャルがスカラーとベクトルに分かれる。また、後者は渦のない場 ($\text{rot} E = 0$) と発散のない場 ($\text{div} B = 0$) の違いによる。

ここで、両者が対応する例を取り上げよう。無限に広い導体平面から a だけ離して単位長さあたり λ の線電荷を置いたとき、真空領域における電位は、導体を取り除き、平面に対して線電荷と鏡像の位置に $-\lambda$ の鏡像線電荷を置いたときのもので与えられることがよく知られている。すなわち、 z 軸を平面に垂直に定義して平面を $z = 0$ とし、線電荷の方向を y 軸、線電荷から平面に垂直に下ろした位置を $x = 0$ とすると、真空領域における電位は

$$\phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \frac{x^2 + (z+a)^2}{x^2 + (z-a)^2} \dots\dots\dots (5)$$

となる。実際に導体平面 ($z = 0$) 上で電位が0となり、境界条件が満たされる。したがって、解の一意性より上の結果が解である。実際には鏡像電荷の代わりに導体平面上に表面電荷が現れ、電気力線の様子は図3のようになる。導体表面の面電荷密度 σ は上の電位から導かれる電界についての境界条件より求まる。

同様に、無限に広い超電導体平面から a だけ離して線電流 I を置いたとき、真空領域におけるベクトルポテンシャルは、超電導体を取り除き、平面に対して線電流と鏡像の位置に $-I$ の鏡像線電流を置いたときのもので与えられる。このときベクトルポテンシャルは電流と同じ方向の y 成分のみを持ち、真空領域において

$$A_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \log \frac{x^2 + (z+a)^2}{x^2 + (z-a)^2} \dots\dots\dots (6)$$

となる。超電導体平面 ($z = 0$) 上でベクトルポテンシャルが0となって境界条件が満たされることから、上の結果が解である。実際には鏡像電流の代わりに超電導体平面上

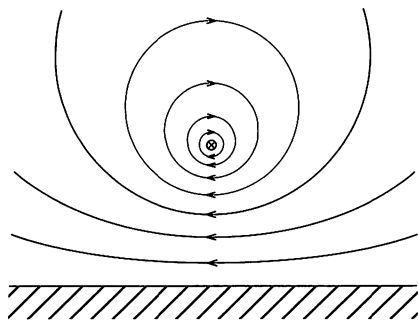


図4 線電流と超電導体平面の間の磁束線の様子

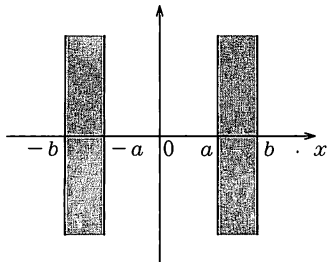


図5 2枚の広い導体平板

に面電流が流れ、磁束線の様子は図4のようになる。超電導体表面の面電流密度 τ は上のベクトルポテンシャルから導かれる磁束密度と(4)式の境界条件より求まる。

ここでもう一つ対応する例を示そう。図5のように2枚の広い導体平板があり、左側の導体に電荷 Q を与えた場合、右側の導体にも静電誘導により電荷が現れる。電荷は両側の導体内を遮へいするように導体の表面に分布する。その解法は読者にまかせることとして、結果は $Q/2(x = -b)$, $Q/2(x = -a)$, $-Q/2(x = a)$, $Q/2(x = b)$ となる。同様な形状の超電導平板の左側に電流 I を(紙面向こう向きに)流した場合、右側の超電導体にも反磁性により電流が現れる。この場合も同様に $I/2(x = -b)$, $I/2(x = -a)$, $-I/2(x = a)$, $I/2(x = b)$ となる。

以上の例から渦なしの場と発散なしの場の違いはあっても、導体における静電気現象と超電導体における静磁気現象の間に極めて高い対応があることが理解されよう。

4. 電気材料と磁気材料の対応

これまで導体と超電導体のみを比べてが、ここで枠を広げ、誘電体と磁性体を加えて電気材料と磁気材料を比較してみよう。一例として電気材料の球に一樣な電界を、磁気材料の球に一樣な磁束密度を加えた場合を取り上げる。図6はこのときの電束の様子と磁束の様子を示す。導体と超電導体は内部を完全に遮へいするが、その方法は全く異なる。これは場の性質の違いによるもので、前者の場合、遮へいは電荷によって電束線を吸い込んで行われ、後者の場合、遮へいは渦を作って磁束線を押し出して行われる。こ

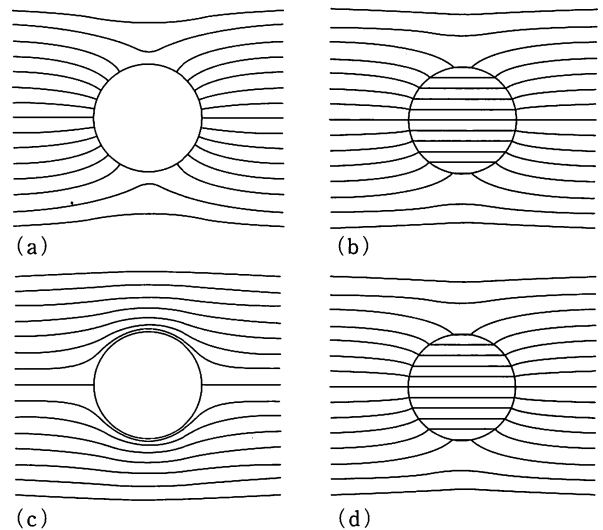


図6 導体球(a)と誘電体球(b)に一樣な電界を加えた場合の電束線の様子と、超電導体球(c)と磁性体球(d)に一樣な磁束密度を加えた場合の磁束線の様子。

れらの遮へいはともに外部に取り出せる真電荷とその流れである真電流によるものである。こうした事実も導体と超電導体の対応を際立たせるものである。

誘電体と磁性体は数学的には同等で、誘電率の比 ϵ/ϵ_0 と透磁率の比 μ/μ_0 が同じであれば、電束線と磁束線の様子は全く同じとなる。これは電荷密度がないときの電束密度 D と磁束密度 B が、ともに発散がないという同一の式に従うからである。これらの現象にはともに外部には取り出せない分極電荷と磁化電流が関与する。なお、電界の強さ E については少し異なり、 $\epsilon > \epsilon_0$ の関係のため、内部の電界は外部で与えた電界よりも小さくなる。表面に現れる分極電荷によって遮へいされるためである。

図6の関係で電気材料と磁気材料の対応はほとんど書き尽くしたと見てよいことに注意すべきである。境界面に対して電界の平行成分と磁束密度の垂直成分は連続でなければならない、自由度があるのは電束密度の垂直成分と磁界の平行成分だけだからである。これらは真面電荷または真面電流による遮へいがある場合にのみ不連続となり、それ以外は連続となる。したがって、例外は超電導体球の中間状態や混合状態のように不完全に遮へいされる場合だけであり、これに対応する静電気現象としては分極電荷以外に表面に真電荷も現れるような現象を考えればよい。なお、中間状態とは、外部磁界が臨界磁界以下であっても超電導体の形状のために局所的磁界が臨界磁界に達して起こる現象で、超電導体内部に磁束が侵入する。

以上より、静電気現象と静磁気現象の対応はよく、逆に超電導体がない場合は対応が不完全となることが理解できよう。具体的な物性物理を考慮せずに物質の電磁気的な性

質のみを記述するという電磁気学的手法に基づき、こうした電気と磁気の対応から超電導体の発見以前においても内部の磁束密度が0となる物質の存在を仮定することは可能で、そうするとその物質では遮へい電流が流れ続けなければならないことから、電気抵抗が0となることが予測されたはずである。そうした予測を可能にするほど電磁気学は有効な学問であると言えよう。

5. 超電導体の磁化と磁性体の磁化

超電導体の磁化と磁性体の磁化はいずれも単位体積あたりの磁気モーメントとして定義されるが、その起源が異なるため、両者で電磁気学的に違った表現になる。

まず、一般的な磁性体について、磁化 M は磁界の強さ H および磁束密度 B と

$$M = \frac{1}{\mu_0} B - H \dots\dots\dots(7)$$

の局所的な関係にある。一方、超電導体の場合、ここでは対応して内部に磁束が侵入した場合を含めて取り扱うが、磁気モーメントの起源は表面を流れる真電流であり、したがって、 H に結びついたものである。すなわち、磁性超電導体を除けば局所的な M は0であり、電磁気学的には非磁性体となる。そして、磁化は局所的な量ではなく、定義に従って試料全体の磁気モーメントをその体積で割った一つの量として取り扱われるのが慣例である。とくに、形状効果がない場合、内部の磁束密度の平均を μ_0 で割ったものと外部磁界 H_e の差として

$$M = \frac{1}{\mu_0} \langle B \rangle - H_e \dots\dots\dots(8)$$

で与えられる。図1の磁化もこの定義による。したがって、超電導体では外部変数（外部磁界）に対する内部変数という熱力学的なとらえ方になっている。問題は超電導体の反磁性磁化を(7)式から説明しようとする取り扱いである。

図5の超電導体の例で左側の平板に与えた電流は輸送電流であるが、では右側の平板に生じた電流は磁化電流であろうか。両方の面で流れる方向が違って磁気モーメントは生じるが、これは真電流である。二つの平板の右側だけを比べれば全く同一の現象が起こっているが、(7)式を無理に使うとすると、左側平板では内部の $H = 0$ と外の自己磁界 H_1 の差が表面電流を与え、右側平板では内部で $H = H_1$ と $M = -H_1$ によって $B = 0$ が保たれ、内部の M と外部の $M = 0$ の差が表面電流を与えると主張することになる。このような不自然なことを仮定せずとも、真電流であることを考慮して左側平板と同様に磁界 H の差が

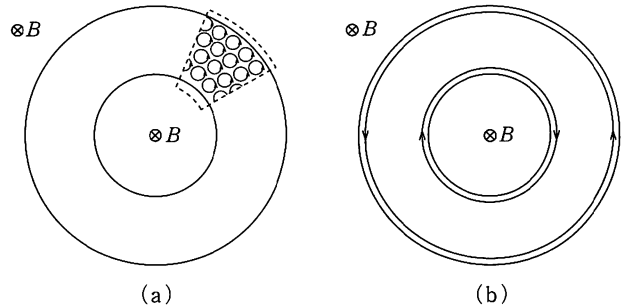


図7 中空の超電導体に仮定した (a) 微小閉磁化電流と (b) 表面に残った磁化電流。中空領域に磁束が入る。

表面電流を与えるとすればよい⁽²⁾。

以上の場合には無理にでも超電導体の磁化を磁化電流によるものとして説明しようとするれば可能であるが、それができない場合を示そう。磁性体と同様に磁化が密度 i_m の微小閉磁化電流の集合として表されると仮定してみよう。中が密な超電導体の場合は、隣り合った部分の磁化電流が打ち消しあい、最終的に表面に流れる磁化電流だけが残る、実験結果が説明できる。一方、中空の超電導体円柱に平行に磁界をかけた場合は、同じ理由から内表面にも磁化電流が残る、中空領域にも磁束が入る(図7)。しかしながら、実際には中空ではあっても内表面に電流が流れることはなく、中空は完全に遮へいされる。したがって、磁化電流によっては超電導体の磁化現象は説明されない。

こうした磁化を電気現象に対応させれば、導体における静電遮へいと誘電体における電気分極になる。これらは互いに類似した現象であるが、遮へいの源が真電荷であるか分極電荷であるかによる。図5の導体平板の例では右側の平板に誘導された真電荷によって電気双極子モーメントが生じる。超電導体の磁化を磁化電流で説明しようとするのはこの例を無理に分極電荷による電気分極で説明しようとするのと等価である。図7の場合と同様に中空の導体円柱に横から電界を加えたときにそれを行えば、内部表面に分極電荷が現れることとなり、現実と矛盾する。導体の静電遮へいは分極電荷によっては説明されない。

6. 超電導体導入の効果

超電導を電磁気学に導入する効果の一つは、実際に物質の中の電流が磁気モーメントをもたらすことを示せることである。外には取り出せないと言っても分極電荷は実在する電荷であるのに対して、磁気の場合、磁荷は実在せず、等価だと言って説明する磁化電流も実在しないとあつては説明の歯切れが悪くなるが、唯一、実在する超電導体の電流がそれを救ってくれる。

そして、電磁誘導を用いることなく静磁気エネルギーの議

論ができるのも超電導の導入の効果である。ここで、図8のようなコの字型の固定部と長辺に平行な可動部からなる超電導回路を考え、固定部と可動部間の電氣的超電導接続は保たれているものとする。また、長辺の長さ a および高さ h は長い2辺の間隔 x に比べ十分長いとする。次にこの超電導体の高さ方向に内部に磁束 Φ をトラップさせる。こうするには、図2のところで行ったように、まず磁界をかけ、それから冷却して超電導状態にした後、外部磁界を除去すればよい。この方法を磁界（磁場）中冷却という。内部の磁束密度は $B = \Phi/ax$ であり、超電導体の内側の壁面にこの磁界を遮へいするために面電流が流れる。(4)式よりこの電流は単位高さあたり $\tau = B/\mu_0$ の値となる。この状態が達成されてからは外界からは何の変化も与えないので、この系は孤立している。

可動部の面電流は相手方の固定部の電流によって生じる磁束密度によってローレンツ力を受ける。したがって可動部を自由にさせれば可動部は動き、距離 x は増加することになる。このとき、超電導体の反磁性のため磁束は超電導体を横切って外部に出ることはない（磁束線の生成・消滅はなく、磁束が変化する場合は侵入するか出て行くしかないことに注意）、内部の磁束 Φ は保存され、磁束密度 B および面電流密度 τ が変化する。この移動の間、固定部の電流が作る磁束密度は全磁束密度の半分なので、可動部が受ける力（反発力）は

$$F = \frac{1}{2} \tau h B a = \frac{\Phi^2 h}{2\mu_0 a x^2} \dots\dots\dots (9)$$

となる。この超電導体系は周囲となんらの磁氣的相互作用もしていないので、この力は系自体が持つ磁気エネルギー U_m の変化によるものであり、磁気エネルギーは

$$U_m = -\int F dx = \frac{\Phi^2 h}{2\mu_0 a x} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 a h x \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる⁽³⁾。超電導体で囲まれた体積 ahx の領域では磁束密度は一様であることから、磁気エネルギー密度も一様であると考えられる。したがって、

$$u_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \dots\dots\dots (11)$$

が磁気エネルギー密度を与える。

全電流 $I = \tau h$ を用いると、磁束は $\Phi = \mu_0 a x I / h$ であるので、この超電導体系の自己インダクタンスは $L = \mu_0 a x / h$ となる。これらを用いると、磁気エネルギーは

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2L} \Phi I = \frac{1}{2L} \Phi^2 \dots\dots\dots (12)$$

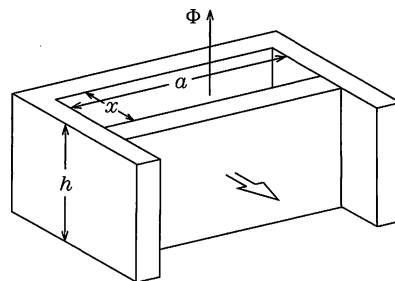


図8 超電導体からなる閉回路

とも書ける。これらの関係式は、静電容量 C と電位差 ϕ を用いてコンデンサの電気エネルギーを表した

$$U_e = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} \phi Q = \frac{1}{2} C \phi^2 \dots\dots\dots (13)$$

の関係式とそれぞれ対応している。

このように、超電導体の導入によって静磁気力から磁気エネルギーを直接導くことができる。後に読者は電磁誘導を学んでから、上の場合には超電導回路で磁束量が保存されることから誘導起電力が生じていないことを知ることになる。従来は、電磁誘導現象を学んだ後に磁気エネルギーを等価な電気エネルギーと対応させることで初めて磁気エネルギーの講義が可能であった。それを省略できたのは、超電導体の場合には電源と切り離れた孤立系を取り扱ったからである。なお、一般の電源とつながった非超電導回路の場合には静磁気力と磁気エネルギーの関係を議論できないことを示しておくことは重要である。そして、そうした静的な現象についての実際の結果に基づいて解析すると、電磁誘導が生じなければ矛盾が生じることが明らかとなり、静的磁気現象から電磁誘導が予言できるのである⁽⁴⁾。

7. おわりに

以上のように、場の性質の違いはあるものの、完全反磁性状態にある超電導体の磁気現象は導体の電気現象と対応しており、とくに現在の **E-B** 対応の中ではこうした対応関係は傑出している。さらに、静磁気現象の中で磁気エネルギーを議論できるということも一つの長所である。したがって、超電導現象を一つの要素として教育に取り入れていけばより効果的であると期待できる。

(2008年5月21日受付)

— 文 献 —

- (1) 松下照男, 他: 超伝導応用の基礎, 米田出版, p.24 (2004)
- (2) エリ・デ・ランダウ, イエ・エム・リフシッツ: 電磁気学1 (井上建男, 安河内昂, 佐々木健 訳), 東京図書, p.210
- (3) 松下照男: 新電磁気学—電気・磁気学の新しい体系の確立—, コロナ社, p.144 (2004)
- (4) 同上 p.148