

超伝導体の磁気現象における問題の解析の 研究

高田 真弓

平成 21 年 3 月 21 日

目次

第 1 章	はじめに	4
1.1	超伝導体の磁化	4
1.1.1	超伝導現象	4
1.1.2	マイスナー状態	5
1.1.3	第一種超伝導体と第二種超伝導体	5
1.1.4	超伝導体の磁化に関する従来の取り扱い	7
1.2	磁気エネルギー	7
1.2.1	電磁誘導	8
1.2.2	力学的仕事からの磁気エネルギーの導出	8
1.3	Poynting ベクトル	9
1.4	磁束の連続の式	9
1.5	本研究の目的	10
第 2 章	マイスナー効果と中間状態における超伝導球の磁化	11
2.1	マイスナー効果の場合	11
2.1.1	一般的な境界条件を用いた場合	11
2.1.2	従来の磁化 M を用いた場合	13
2.2	中間状態の場合	14
2.2.1	一般的な境界条件を用いた場合	15
2.2.2	従来の磁化 M を用いた場合	16
第 3 章	マイスナー効果と中間状態における超伝導円柱の磁化	19
3.1	マイスナー効果の場合	19
3.1.1	一般的な境界条件を用いた場合	19
3.1.2	従来の磁化 M を用いた場合	20
3.2	中間状態の場合	21
3.2.1	一般的な境界条件を用いた場合	21
3.2.2	従来の磁化 M を用いた場合	23
第 4 章	電流の磁気エネルギーの求め方について	25
4.1	電流間の力とエネルギーの関係	25

第 5 章 Poynting ベクトルに関する考察	28
5.1 Poynting ベクトルを用いた計算 I	28
5.2 Poynting ベクトルを用いた計算 II	33
謝辞	38
参考文献	38

表 目 次

1.1 導体と超伝導体の比較	5
--------------------------	---

目 次

1.1	低温における超伝導体の温度と磁場の関係	4
1.2	超伝導平板と平行な磁束密度ベクトル	5
1.3	第一種超伝導体と第二種超伝導体の磁化	6
1.4	中間状態の磁化	6
1.5	薄い磁性体平板の分割部分に流れる磁化電流	7
2.1	真電流の外部と内部	12
2.2	磁化電流の内部と外部	13
2.3	一様な磁束密度の中に置かれた中間状態の超伝導体球	15
2.4	超伝導球の磁化と磁場の関係	18
3.1	超伝導円柱の磁化と磁場の関係	24
4.1	電流間の力とエネルギーの関係 (電源に接続している)	26
5.1	左:磁束密度の勾配 右:磁束の曲げ	28
5.2	超伝導体の Poynting ベクトル I	30
5.3	超伝導体の磁束量変化 I	32
5.4	超伝導体の Poynting ベクトル II	35
5.5	超伝導体の磁束量変化 II	36

第1章 はじめに

本研究は超伝導現象についてのいくつかの問題を解くことによって電磁気学における理論や公式についてのより深い理解を得ることを目的とする。

1.1 超伝導体の磁化

1.1.1 超伝導現象

1911年にオランダの H.Kamerlingh Onnes は水銀の電気抵抗が 4.2K を境に突然ゼロになるという現象を発見し、この現象を超伝導現象と名付けた。この常伝導状態から超伝導状態に移る温度を臨界温度 T_c と定義した (図 1.1)。低温において電気抵抗が消滅し、かつ完全反磁性 (マイスナー効果) を示す物質のことを超伝導体とよぶ。完全反磁性とは、1933 年にマイスナーとその弟子オクセンフェルドによって発見されたもので、超伝導体に外から磁場をかけても超伝導体の表面に電流が流れ外部磁場を遮蔽してしまい磁場が内部に侵入できなくなる現象で、内部の磁束密度 B がゼロとなる。しかし超伝導状態にある物質にさらに強い磁場をかけることによって超伝導状態から常伝導状態に戻る。この時の磁場を臨界磁場 H_c という。

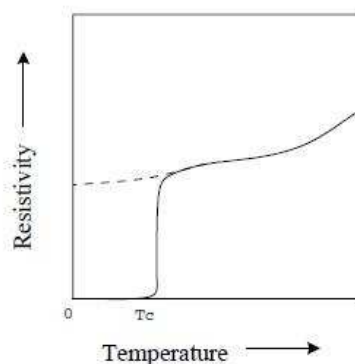


図 1.1: 低温における超伝導体の温度と磁場の関係

1.1.2 マイスナー状態

超伝導体の内部において、磁束密度 $\mathbf{B} = 0$ であるのでアンペールの法則の微分形 $\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$ より電流密度 $\mathbf{i}$ が $\mathbf{i} = 0$ となる。数学的性質より、磁束密度 $\mathbf{B}$ はベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の回転 $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ で表される。このことより $\mathbf{A}$ は一定であることがわかる。ここで表 1.1 を用いて電気現象における導体と超伝導体を比較してみる。このことにより電気現象における導体と超伝導体は類似性があると考えられる。

表 1.1: 導体と超伝導体の比較

導体		超伝導体	
電界	$\mathbf{E} = 0$	磁束密度	$\mathbf{B} = 0$
電荷密度	$\rho = 0$	電流密度	$\mathbf{i} = 0$
電位	$\phi = \text{一定}$	ベクトルポテンシャル	$\mathbf{A} = \text{一定}$

超伝導体の表面に流れる電流について考える。図 1.2 のように外部から超伝導平板に平行に磁束密度 $\mathbf{B}$ を加えたとする。このとき右側の表面付近に長方形の閉曲線 ΔC 、また閉曲線 ΔC 上に張る面 ΔS を定義する。磁束密度が超伝導体の表面に平行であることより、 ΔC 上でアンペールの法則 $\oint_{\Delta C} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_{\Delta S} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}$ を用いると、左辺 $= B \Delta l$ また右辺 $= \mu_0 \tau \Delta l$ である (τ : 表面電流密度)。この2式より $B = \mu_0 \tau$ が成立つ。

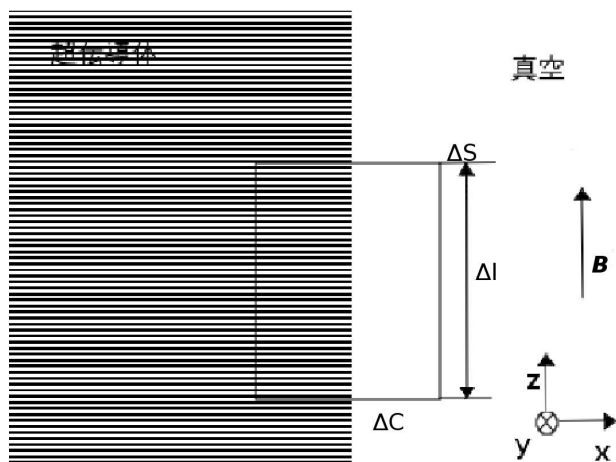


図 1.2: 超伝導平板と平行な磁束密度ベクトル

1.1.3 第一種超伝導体と第二種超伝導体

超伝導状態では臨界磁場をかけることで超伝導状態が壊れるが、この壊れ方によって第一種超伝導体と第二種超伝導体 (図 1.3) とに区別することができる。

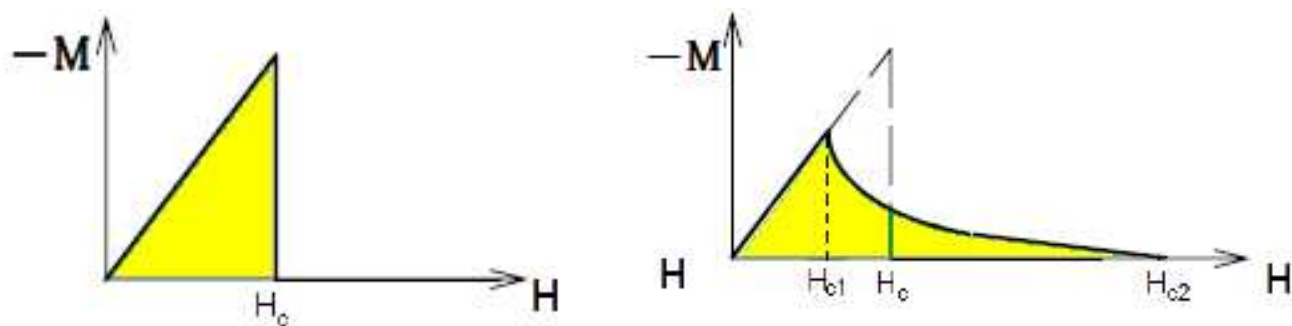


図 1.3: 第一種超伝導体と第二種超伝導体の磁化

第一種超伝導体とは磁気的には臨界磁場 H_c を境にして完全磁性を示す超伝導状態から常伝導状態に移るという単純な特性をもつ物質である。第一種超伝導状態に比べ第二種超伝導体は臨界磁場を印可した際に、下部臨界磁場 H_{c1} と呼ばれる強さ以上の磁場をかけることにより、完全反磁性を示していた磁束線が内部に侵入してくる。この時の状態を混合状態という。混合状態は上部臨界磁場 H_{c2} と呼ばれる強さの磁場に達した際に破れ、常伝導状態に移る。

また第一種超伝導体ではあってもこの混合状態と同様に磁束線が内部に侵入する状態に中間状態がある (図 1.4)。中間状態とは外部磁場が臨界磁場以下の状態でも超伝導体の形状により局所的な磁場が臨界磁場に達して起こる現象である。また混合状態や中間状態では磁束線が内部に侵入しているが超伝導状態が壊れているわけではない。

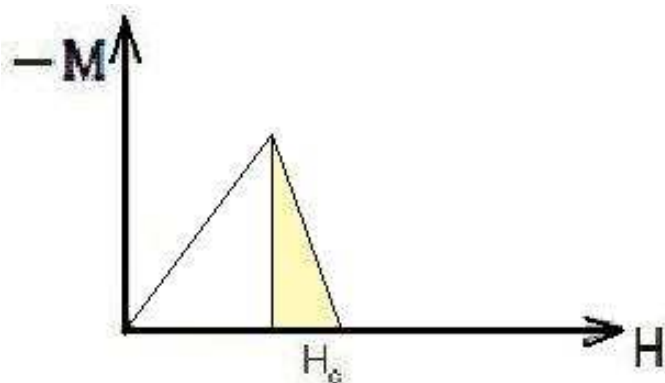


図 1.4: 中間状態の磁化

1.1.4 超伝導体の磁化に関する従来の取り扱い

超伝導体の磁化と磁性体の磁化はどちらも単位体積当たりの磁気モーメントとして定義される。一般的な磁性体について言うと、従来の電磁気学における手法を用いて磁化 M は磁場の強さ H および磁束密度 B と $M = B/\mu_0 - H$ の局所的な関係で与えられる。また磁気モーメントが閉電流で等価に表せることができ、この閉電流を磁化電流という。

中空でない場合の薄い磁性体平板について考えてみる。この平板を図 1.5 のように細かく分割した時には各部分の磁気モーメントは各部分の周辺を流れる磁化電流であると考えられる。この磁化電流は隣の部分に流れる磁化電流と打ち消し合うことになる。この結果として薄い平板の周辺に流れる磁化電流のみが残ることになる。このことより中空でない場合、磁性体の磁化電流と超伝導体に流れる電流は同じであると考えられる。また超伝導体の磁化を求める際には真電流でなく、磁化電流を用いることができる。このことから中空でない超伝導体に対しては形式的にこの手法を用いて解析することもできる。

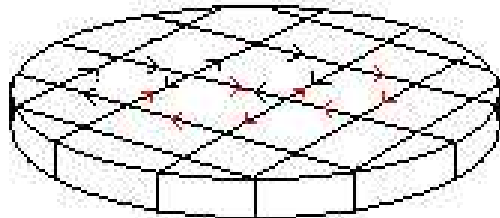


図 1.5: 薄い磁性体平板の分割部分に流れる磁化電流

1.2 磁気エネルギー

電気 (静電) エネルギーは、微小電荷を無限遠から運ぶときの力学エネルギーとして導くことができる。一方、磁気エネルギーは平行な微小電流を無限遠から運ぶときの力学エネルギーとして考えると、エネルギーの力は引力であることから電流が存在しない初期状態のエネルギーより低いことになってしまう。このため力学エネルギーだけでは導くことはできない。

ここで電流は電荷と違い、電流を保つための電源に接続してあることに注目すると、磁束が変化しないように電磁誘導の法則が働く。つまり電流を変位させるときに生じる誘導起電力に逆らって電流を一定に流すために電源がする仕事を考慮することによって磁気エネルギーが導かれると考えることができる。

1.2.1 電磁誘導

電磁誘導とは例えば電流が流れているコイルが存在し、このコイルの周辺には磁束密度が生じる。このコイルを動かしたり、電流を変化させた状態の時に近くに別のコイルを置くと、このコイルに電流が流れる。このような現象のことをいう。またこの時に別のコイルに電流を流した力を誘導起電力という。この誘導起電力は別のコイルの磁束を変化させないために働いた起電力であると考えられる。コイルを貫く磁束を Φ とすると誘導起電力は

$$V_{\text{em}} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

で得ることができる。

自己インダクタンス L のコイルを考え、これに電流 I' を流すとコイルを貫く磁束は

$$\Phi' = LI'$$

となる。ここで微小な時間 dt の間に電流を dI' だけ増やすと誘導機電力は

$$V_{\text{em}} = -L \frac{dI'}{dt}$$

が生じ、電流の増加を抑えようと作用する。

電流を増加させるためには電源が誘導機電力に逆らって仕事をしなければならない。この間の電源の仕事率は

$$dP = -V_{\text{em}} I' = LI' \frac{dI'}{dt}$$

となる。このコイルに電流を流したときにコイルに蓄えられるエネルギーは、電流を 0 から I までに増加させる間に電源がした仕事に等しく

$$U_{\text{m}} = W = \int_0^I LI' \frac{dI'}{dt} dt = \frac{1}{2} LI^2$$

となる。磁束 $\Phi = LI$ を用いると

$$U_{\text{m}} = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \Phi I^2 = \frac{1}{2L} \Phi^2$$

が得られ、このエネルギーが磁気エネルギーであることがわかる。このように、従来は磁気エネルギーは等価である電氣的な仕事として等価的に求めるしか術がなかったのである。

1.2.2 力学的仕事からの磁気エネルギーの導出

この磁気エネルギーと仮想変位の原理を用いると、電流が流れる導体間に働く磁気力を求めることができる。この磁気力は電流間に働くローレンツ力の合計である。つまり言い替えると磁気エネルギーはローレンツ力と仮想変位の原理によって求めることが可能であると言うことである。ここでは、2つの電流間での電磁誘導現象がかかわっており、仮想変位の原理を用いるのに注意をしなければならない。この考えが正しいかどうかを証明する。

1.3 Poynting ベクトル

時間とともに変動する電磁界の全エネルギー密度は

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 + \int \mathbf{i} \cdot \mathbf{E} dt$$

から得られる。第1項は電界のエネルギー、第2項は磁界のエネルギー、第3項は荷電粒子に働く力学的エネルギーである。ある空間 V の全エネルギーの時間変化は

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV = \int_V \left(\varepsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{i} \cdot \mathbf{E} \right) dV$$

となる。第1項と第3項をまとめて整理し、第2項の $\partial \mathbf{B} / \partial t$ を消去すると

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

となり S は領域 V の表面である。ここで

$$\mathbf{S}_P = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

とベクトルを定義することにより

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV + \int_S \mathbf{S}_P \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.1)$$

が成り立つ。このときの $\mathbf{S}_P$ を Poynting ベクトルという。これは空間 V 内のエネルギーの変化の割合が表面 S を通って V 内に流れこむ Poynting ベクトルに等しいことを記している。したがって Poynting ベクトルが電磁界のエネルギーの流れを表すものであると考えることができる。また式 (1.1) を微分形で表すと

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div} \mathbf{S}_P = 0$$

となり、エネルギーの連続の式を得ることができる。

磁気圧によるローレンツ力と線張力によるローレンツ力があるが、ここではそれぞれを Poynting ベクトルを用いて導く。さらに、コイルに電流を流して磁束を蓄積させる過程でのエネルギーの流れを明らかにし、電磁気学の理解を深める。

1.4 磁束の連続の式

磁束の変化によって誘導起電力が生じるが、磁束密度の変化は磁束線の運動により表現することができる。例えば、ある領域の磁束密度が増えた場合、その領域の磁束線が増えたことになり、この増加分は周囲から磁束線が侵入したものとみることができる。

あるコイル C が静止しており、磁束線が速度 $\mathbf{V} = -\mathbf{v}$ で運動すると、 dt の時間内にコイルの一部 $d\mathbf{s}$ を通って同じ磁束が侵入する。この時のコイルを貫く磁束 Φ の時間変化は

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \int_C (\mathbf{B} \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{s}$$

となる.これを局所的に書くと

$$\text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{V}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

となり,これを磁束の連続の式という.この式は磁束の変化から磁束の変位を求める時に用いる.

1.5 本研究の目的

本研究の目的として,超伝導体の磁気現象についての問題にあたり,電磁気学における理解をより深めることである.問題として以下をあげる.

- 1.超伝導球と超伝導円柱の磁化についてマイスナー効果の場合と中間状態の場合とでそれぞれ求め,第一種超伝導体の磁化の変化,つまり中間状態がどの範囲で起こり得るのかを導く.
- 2.磁気エネルギーを求めるにあたって仮想変位の原理と電磁誘導現象についての深い理解を得る.また仮想変位とローレンツ力によって磁気エネルギーが導かれることを証明する.
- 3.Poynting ベクトルを用いて磁気圧によるローレンツ力と線張力によるローレンツ力が導かれることを証明する.またコイルに電流を流して磁束を蓄積させる過程でのエネルギーの流れを明らかにし,電磁気学の理解を深める.

第2章 マイスナー効果と中間状態における超伝導球の磁化

一様な磁束密度 B_0 の中に半径 a の超伝導球を置いたときの磁化 M を求めることを考える。以上の問題の解法については3種類の解き方がある。1つ目は一般的な境界条件を用いた方法である。2つ目は従来の磁化 M を用いた方法である。そして3つ目はベクトルポテンシャルを用いた方法である。2つ目と3つ目についてはそれぞれ欠点がある。2つ目の従来の磁化 M を用いる方法では中空領域をもつ物質には用いることができず、3つ目のベクトルポテンシャルを用いた方法では $\mathbf{A} = 0$ が成り立つマイスナー状態でしか用いることができず、中間状態では内部に磁束が入っているため $\mathbf{A} = 0$ が成り立たない。このため磁束密度を求めるにあたって解析が難しいため今回の研究では解析を行わない。したがって、ここではマイスナー状態及び中間状態である中空領域のない超伝導体の解法について一般的な境界条件を用いた方法と従来の磁化 M を用いた方法の2つの解法について考える。

2.1 マイスナー効果の場合

2.1.1 一般的な境界条件を用いた場合

この時の超伝導球内の表面を流れる面電流密度を τ とし、超伝導体に真電流が流れた場合の磁化であるとする。また方位角の対称性により、超伝導球を半分に切った面のみを考えることで求めることができる。

未知の量である磁化 M を求めるために境界条件をあげる。

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \tau \end{cases} \quad (2.1)$$

$$(2.2)$$

ただし、 $\mathbf{B}_1, \mathbf{H}_1$ は球外、また $\mathbf{B}_2, \mathbf{H}_2$ は球内での磁束密度と磁場であるとする。 τ は超伝導体の表面に流れる面電流密度であり、またそれぞれの領域での磁場 $\mathbf{H}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ は $\mathbf{H} = 1/\mu_0 \mathbf{B}$ の関係にある。この問題は加えた磁束密度の方向の中心軸回りの回転対称性のため、半径及び天頂角のみに依存する2次元問題として取り扱うことができる。

球外の磁束密度について考える。真電流の表面電流密度が作った磁気モーメントを球の中心におき、この磁気モーメントと一様な磁束密度 $\mathbf{B}_0$ が作る磁束密度の和で与えられる。これらを極座標成分に別け、成分同士を足し合わせる。ここで r は超伝導球の中心からの距離、 θ は球の中心

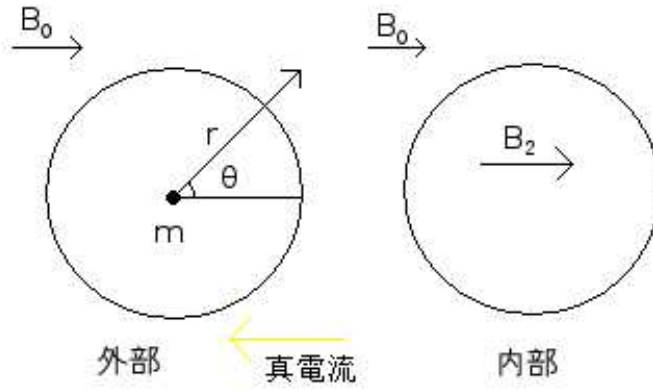


図 2.1: 真電流の外部と内部

を原点とした一様な電流の方向から測った天頂角であるとする.

$$\begin{cases} B_{1r} = B_0 \cos \theta + \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} \cos \theta \\ B_{1\theta} = -B_0 \sin \theta + \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sin \theta \end{cases} \quad (2.3)$$

$$(2.4)$$

また, 球内の磁束密度はマイスナー効果にあるので 0 である. したがって $B_2 = 0$, $H_2 = 0$ が得られる.

球内と球外での磁束密度を用いて, $r = a$ における境界条件について考える. 条件式 (2.1) は垂直成分についての条件式であるのでこの場合 B_{1r} についての条件と考えるので,

$$\left(B_0 + \frac{\mu_0 m}{2\pi a^3} \right) \cos \theta = 0$$

となり,

$$m = -\frac{2\pi a^3}{\mu_0} B_0$$

を求めることができる.

次に $B_{1\theta}$ に求めた m を代入し, 条件式 (2.2) にあてはめる.

$$\frac{1}{\mu_0} \left[-B_0 + \frac{\mu_0}{4\pi a^3} \left(-\frac{2\pi a^3}{\mu_0} B_0 \right) \right] \sin \theta = \tau \quad (2.5)$$

これより面電流密度 τ が求まる.

$$\tau = -\frac{3B_0}{2\mu_0} \sin \theta \quad (2.6)$$

これを用いて $B_{1\theta}$ を求めると,

$$\tau = \frac{B_{1\theta}}{\mu_0}$$

この関係より,

$$B_{1\theta} = -\frac{3}{2}B_0 \sin \theta$$

が求まる.

この結果により形状効果が存在することがわかる. また $B_{1\theta}$ は $\theta = \pm\pi/2$ のとき最大磁束密度は $|B_{1\theta}| = (3/2)B_0$ であることがわかった. つまり, B_0 は臨界磁場を H_c として $\mu_0 H_c$ 以下であるが, $(3/2)B_0$ が $\mu_0 H_c$ を超える場合があり, この場合に中間状態となる. したがって超伝導球がマイスナー状態であり得る B_0 の最大値は $(2/3)\mu_0 H_c$ となる.

また磁化 M は $M = m/\text{体積}$ より求まる. 超伝導球の体積は $(4/3)\pi a^3$ より,

$$M = -\frac{3B_0}{2\mu_0}$$

が求まる.

2.1.2 従来の磁化 M を用いた場合

この方法では超伝導球には表面における外部磁場がそのまま侵入していると考えるので, 磁場は表面で連続であり, 従って r について考える必要がない. また磁化は輸送電流によるものではなく, 全て磁化電流によるものであるとする. このため磁場の強さの平行成分は連続である.

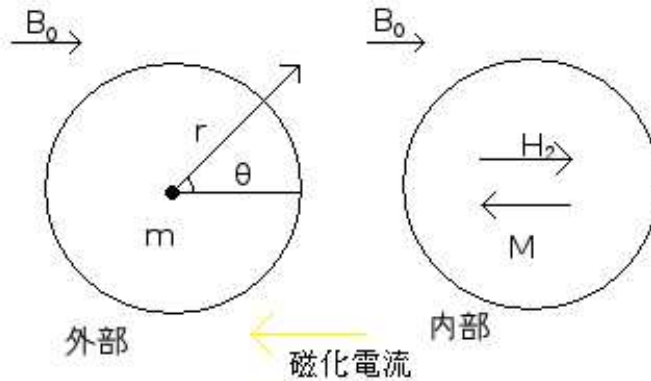


図 2.2: 磁化電流の内部と外部

球内の磁束密度と磁場について考える. 球内の磁場を H_2 , この磁場によって生じる磁化を M , 磁束密度 B_2 とする. 球内の磁束密度の r 成分と磁場の θ 成分はそれぞれ,

$$\begin{cases} B_{2r} = \mu_0 (H_2 + M) \cos \theta & (2.7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{2\theta} = -H_2 \sin \theta & (2.8) \end{cases}$$

となる.

次に球外の磁束密度と磁場について考える. 一様な磁束密度 B_0 と球内の一様な磁化による磁気モーメント m が作る磁束密度の和が超伝導球外の磁束密度であるとする. したがって, 定義より $M = m/(4/3)\pi a^3$ となる.

外部における磁束密度の r 成分, 磁場の θ 成分はそれぞれ

$$\begin{cases} B_{1r} = B_0 \cos \theta + \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} \cos \theta \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} H_{1\theta} = -\frac{B_0}{\mu_0} \sin \theta + \frac{m}{4\pi r^3} \sin \theta \end{cases} \quad (2.10)$$

となる. この式を M を用いて表すと

$$\begin{cases} B_{1r} = B_0 \cos \theta + \frac{2\mu_0 a^3 M}{3r^3} \cos \theta \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} H_{1\theta} = -\frac{B_0}{\mu_0} \sin \theta + \frac{a^3 M}{3r^3} \sin \theta \end{cases} \quad (2.12)$$

マイスナー効果であるので球内の磁束密度は 0 であることより, $B_2 = \mu_0 (H_2 + M) = 0$ が成り立ち, $M = -H_2$ となる. また $r = a$ において球内と球外の r 成分は連続であることより,

$$\left(B_0 + \frac{2\mu_0 M}{3} \right) \cos \theta = 0$$

となる. したがって磁化 M は

$$M = -\frac{3B_0}{2\mu_0} \quad (2.13)$$

で与えられる. これと式 (2.8) 及び $B_2 = 0$ より, 未知の量 H_2 は

$$H_2 = \frac{3B_0}{2\mu_0}$$

となる. またこれより球の端を流れる磁化面電流密度 τ'_m は

$$\tau'_m = M$$

となり, ここでは球の表面を流れる磁化面電流密度 τ_m について求めるので,

$$\tau_m = \tau'_m \sin \theta = -\frac{3B_0}{2\mu_0} \sin \theta$$

となる. したがって, 一般的な境界条件を用いた場合の面電流密度 (式 (2.6)) と等しいことが求められた.

以上より, 超伝導体の遮蔽が真電流によるとして求めた磁化 M と磁化電流によるとして従来の方法で求めた磁化 M が等しくなることがわかる.

2.2 中間状態の場合

次に超伝導球が中間状態にあるときの磁化 M を求める.

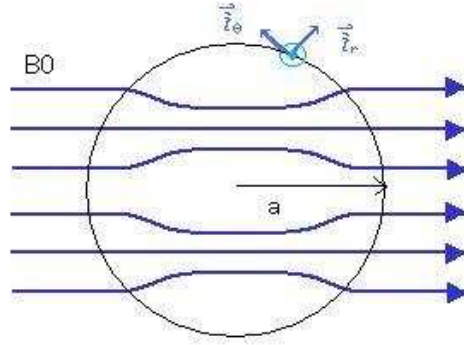


図 2.3: 一様な磁束密度の中に置かれた中間状態の超伝導体球

2.2.1 一般的な境界条件を用いた場合

この時の超伝導球内の表面を流れる面電流密度を τ とし, 超伝導体に真電流が流れた場合の磁化であるとする.

未知の量は以下の 3 つである.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{球内の磁束密度 } B_2 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{表面電流密度 } \tau \end{array} \right. \quad (2.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{中心においた磁気モーメント } m \end{array} \right. \quad (2.16)$$

この未知の量を求めるための条件は磁束密度 B と磁場 H の境界条件と最大経験磁束密度についての条件である.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \end{array} \right. \quad (2.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \tau \end{array} \right. \quad (2.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{最大経験磁束密度 } \mu_0 H_c \end{array} \right. \quad (2.19)$$

ここで, 中間状態, すなわち球内に常伝導領域を含んだ状態であるためには, 局所的な $\mu_0 H_c$ に達していなければならない. 球内の磁束密度は B_0 方向に巨視的に一様な値 B_2 であるとする. したがって超伝導球内の磁束密度の r 成分と θ 成分は

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{2r} = B_2 \cos \theta \end{array} \right. \quad (2.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{2\theta} = -B_2 \sin \theta \end{array} \right. \quad (2.21)$$

となる. また, 球外の磁束密度について考える. これは 2.1 のマイスナー効果の場合と同様に一様な磁束密度 B_0 と球の中心においた磁気モーメント m が作る磁束密度の和で得られる. 磁束密度の r 成分, θ 成分はそれぞれ,

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{1r} = B_0 \cos \theta + \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} \cos \theta \end{array} \right. \quad (2.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{1\theta} = -B_0 \sin \theta + \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sin \theta \end{array} \right. \quad (2.23)$$

となる.

球内と球外での磁束密度を用いて, $r = a$ における境界条件について考える.

条件式 (2.17) より

$$\left(B_0 + \frac{\mu_0 m}{2\pi a^3}\right) \cos \theta - B_2 \cos \theta = 0$$

条件式 (2.18) より

$$\frac{1}{\mu_0} \left(-B_0 + \frac{\mu_0 m}{4\pi a^3}\right) \sin \theta + \frac{1}{\mu_0} B_2 \sin \theta = \tau$$

条件式 (2.19) は表面磁場の成分 i_θ で磁場の強さが最大である角度 $\theta = \pi/2$ の時に成り立つことより

$$B_0 - \frac{\mu_0 m}{4\pi a^3} = \mu_0 H_c$$

上記 3 つの式が得られた. これより 磁気モーメント, 内部磁束密度, 表面電流密度を求めると

$$\begin{aligned} m &= \left(\frac{B_0}{\mu_0} - H_c\right) 4\pi a^3 \\ B_2 &= 3B_0 - 2\mu_0 H_c \\ \tau &= 3 \left(\frac{B_0}{\mu_0} - H_c\right) \sin \theta \end{aligned} \tag{2.24}$$

となる. また磁化 M は m を用いて,

$$M = 3 \left(\frac{B_0}{\mu_0} - H_c\right)$$

と求まる.

2.2.2 従来の磁化 M を用いた場合

超伝導球には磁化電流しか流れていないとするので, 磁場の強さの平行成分は連続であり, この時の磁化 M を求める.

球内の磁束密度と磁場について考える. 球内の磁場を H_2 , 磁束密度を B_2 とする. 球内の磁束密度の r 成分と磁場の θ 成分はそれぞれ,

$$\begin{cases} B_{2r} = \mu_0 (H_2 + M) \cos \theta \\ H_{2\theta} = -H_2 \sin \theta \end{cases} \tag{2.25}$$

$$\tag{2.26}$$

となる.

また, 球外における磁束密度の r 成分, 磁場の θ 成分はそれぞれ,

$$\begin{cases} B_{1r} = B_0 \cos \theta + \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} \cos \theta \\ H_{1\theta} = -\frac{B_0}{\mu_0} \sin \theta + \frac{m}{4\pi r^3} \sin \theta \end{cases} \tag{2.27}$$

$$\tag{2.28}$$

となる. この式を磁化 M を用いて表すと

$$\begin{cases} B_{1r} = B_0 \cos \theta + \frac{2\mu_0 a^3 M}{3r^3} \cos \theta \\ H_{1\theta} = -\frac{B_0}{\mu_0} \sin \theta + \frac{a^3 M}{3r^3} \sin \theta \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\begin{cases} H_{1\theta} = -\frac{B_0}{\mu_0} \sin \theta + \frac{a^3 M}{3r^3} \sin \theta \end{cases} \quad (2.30)$$

表面には磁化電流が流れており, $r = a$ において球外と球内は連続であるので,

$$\begin{cases} \mu_0(H_2 + M) = B_0 + \frac{2\mu_0 M}{3} \\ -H_{2\theta} = -\frac{B_0}{\mu_0} + \frac{M}{3} \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\begin{cases} -H_{2\theta} = -\frac{B_0}{\mu_0} + \frac{M}{3} \end{cases} \quad (2.32)$$

が得られる.

中間状態であることより, 内部に磁場 H_c が一様に存在していると考え, このことより磁化 M は,

$$\begin{aligned} \mu_0(H_c + M) &= B_0 + \frac{2\mu_0 M}{3} \\ M &= 3 \left(\frac{B_0}{\mu_0} - H_c \right) \end{aligned}$$

となり, 球内の磁束密度 B_2 は

$$B_2 = 3B_0 - 2\mu_0 H_c$$

となる. また, 球の表面を流れる磁化面電流密度は度 τ_m は

$$\tau_m = -3 \left(\frac{B_0}{\mu_0} - H_c \right) \sin \theta$$

となる. これより, 一般的な境界条件を用いた場合の面電流密度式 (2.24) と等しいことが求められた.

以上より, 中間状態においてもマイスナー効果の場合と同様に, 超伝導体の遮蔽が真電流によるものとして求めた磁化 M と磁化電流によるものとして従来の方法で求めた磁化 M が等しくなることがわかる.

超伝導球のマイスナー効果と中間状態での磁化について図 2.4 にまとめる.

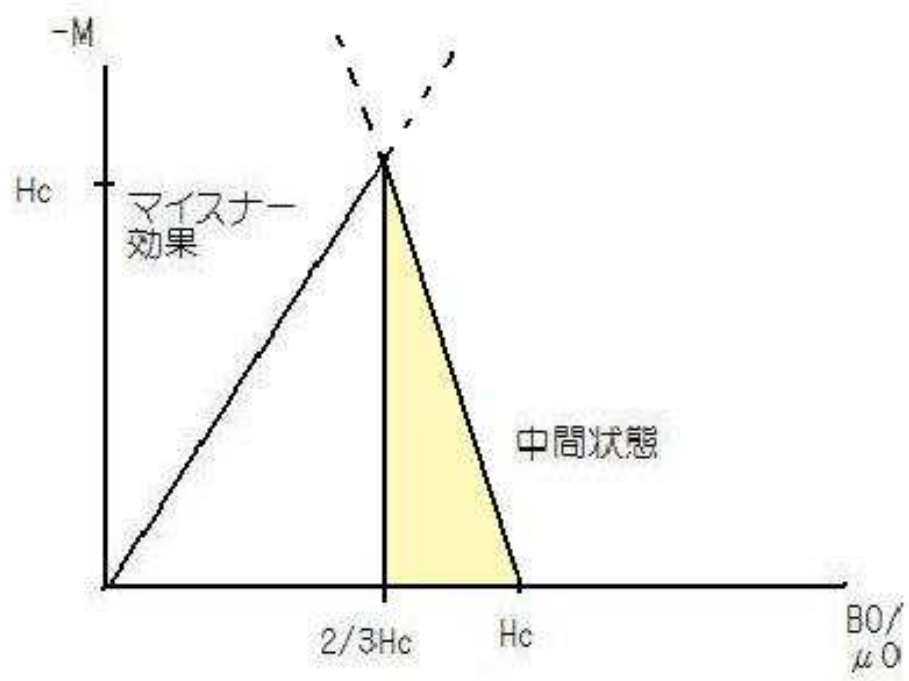


図 2.4: 超伝導球の磁化と磁場の関係

第3章 マイスナー効果と中間状態における超伝導円柱の磁化

この章では、一様な磁束密度 B_0 の中にある無限に長い半径 a の超伝導円柱を置いたときの磁化 M を前の章同様にマイスナー状態の場合と中間状態の場合について求める。

3.1 マイスナー効果の場合

3.1.1 一般的な境界条件を用いた場合

この時の超伝導円柱内の表面を流れる面電流密度を τ , 超伝導体に真電流が流れた場合の磁化であるとする。

未知の量である磁化 M を求めるために境界条件をあげる。

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \tau \end{cases} \quad (3.1)$$

$$(3.2)$$

ただし, $\mathbf{B}_1, \mathbf{H}_1$ は球外, また $\mathbf{B}_2, \mathbf{H}_2$ は球内での磁束密度と磁場であるとする。また, それぞれの領域で磁場 $\mathbf{H}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ は $\mathbf{H} = 1/\mu_0 \mathbf{B}$ の関係にある。無限に長い超伝導円柱であるので2次元の問題として取り扱うことができる。

まず, 円柱内の磁束密度はマイスナー効果にあるので0である。これより, $B_2 = 0$ と $H_2 = 0$ である。

また, 球外の磁束密度について考える。これは一様な磁束密度 B_0 と球の中心においた磁気モーメント m が作る磁束密度の和で得られる。これらを円柱座標成分に別け, 成分同士を足し合わせる。ここで r は超伝導体円柱の中心からの距離であるとし, φ は円柱の中心を原点とした一様な電流方向から測った方位角である。

$$\begin{cases} B_{1r} = B_0 \cos \varphi + \frac{\mu_0 m \cos \varphi}{2\pi r^2} \\ B_{1\varphi} = -B_0 \sin \varphi + \frac{\mu_0 m \sin \varphi}{2\pi r^2} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$(3.4)$$

球内と球外での磁束密度を用いて, $r = a$ における境界条件について考える。条件式 (3.1) は垂直成分についての条件式であるのでこの場合 B_r についての条件と考えるので,

$$\left(B_0 + \frac{\mu_0 m}{2\pi a^2} \right) \cos \varphi = 0$$

となり,

$$m = -\frac{2\pi a^2}{\mu_0} B_0$$

を求めることができる.

次に $B_{1\varphi}$ に求めた m を代入し, 条件式 (3.2) にあてはめる.

$$\frac{1}{\mu_0} \left[-B_0 + \frac{\mu_0}{2\pi a^2} \left(-\frac{2\pi a^2}{\mu_0} B_0 \right) \right] \sin \varphi = \tau$$

これより面電流密度 τ が求まる.

$$\tau = -\frac{2B_0}{\mu_0} \sin \varphi$$

これを用いて $B_{1\varphi}$ を求めると,

$$\tau = \frac{B_{1\varphi}}{\mu_0}$$

この関係より,

$$B_{1\varphi} = -2B_0 \sin \varphi$$

が求まる.

この結果により形状効果が存在することがわかる. また $B_{1\varphi}$ は $\varphi = \pm\pi/2$ のとき最大磁束密度は $|B_{1\varphi}| = 2B_0$ であることがわかった. つまり, B_0 は臨界磁場を H_c として $\mu_0 H_c$ 以下であるが, $2B_0$ が $\mu_0 H_c$ を超える場合があり, この場合中間状態となる. したがって超伝導円柱がマイスナー状態であり得る B_0 の最大値は $(1/2)\mu_0 H_c$ となる.

また磁化 M は $M = m/\text{体積}$ より求まる. 超伝導円柱の体積は πa^2 より,

$$M = \frac{2B_0}{\mu_0}$$

が求まる.

3.1.2 従来の磁化 M を用いた場合

超伝導円柱には磁化電流が流れており連続であり, この時の磁化 M を求める.

円柱内の磁束密度と磁場について考える. 球内の磁場を H_2 , 磁束密度を B_2 とする. 球内の磁束密度の r 成分と磁場の φ 成分はそれぞれ,

$$\begin{cases} B_{2r} = \mu_0 (H_2 + M) \cos \varphi \\ H_{2\varphi} = -H_2 \sin \varphi \end{cases} \quad (3.5)$$

$$(3.6)$$

また, 円柱外における磁束密度の r 成分, 磁場の φ 成分はをそれぞれ

$$\begin{cases} B_{1r} = B_0 \cos \varphi + \frac{\mu_0 m}{2\pi r^2} \cos \varphi \\ H_{1\varphi} = \frac{-B_0}{\mu_0} \sin \varphi + \frac{m}{2\pi r^2} \sin \varphi \end{cases} \quad (3.7)$$

$$(3.8)$$

となる. この式を磁化 M を用いて表す. また超伝導円柱の体積は πa^2 より,

$$\begin{cases} B_{1r} = B_0 \cos \varphi + \frac{\mu_0 a^2 M}{2r^2} \cos \varphi \\ H_{1\varphi} = -\frac{B_0}{\mu_0} \sin \varphi + \frac{a^2 M}{2r^2} \sin \varphi \end{cases} \quad (3.9)$$

マイスナー効果であるので球内の磁束密度は 0 であることより, $B_2 = \mu_0 (H_2 + M) = 0$ が成り立ち, $M = -H_2$ となる. また $r = a$ において球内と球外は連続であることより,

$$\left(B_0 + \frac{\mu_0 M}{2} \right) \cos \varphi = 0$$

となる. これより磁化 M は

$$M = -\frac{2B_0}{\mu_0} \quad (3.11)$$

で得られる. これと式 (3.6) 及び $B_2 = 0$ より, 未知の量 H_2 は

$$H_2 = \frac{3B_0}{2\mu_0}$$

となり, またこれより磁化面電流密度は度 τ'_m は

$$\tau'_m = M$$

となり, ここでは円柱の表面を流れる磁化面電流密度 τ_m について求めるので,

$$\tau_m = \tau'_m \sin \theta = -\frac{2B_0}{\mu_0} \sin \theta$$

となる. これより, 一般的な境界条件を用いた場合の面電流密度と等しいことが求められた.

以上より, 超伝導体の遮蔽が真電流によるものとして求めた磁化 M と磁化電流によるものとして従来の方法で求めた磁化 M が等しくなることがわかる.

3.2 中間状態の場合

次に超伝導円柱が中間状態にあるときの磁化を M を求める.

3.2.1 一般的な境界条件を用いた場合

無限に長い円柱と考えるので 2 次元であるにとらえて考える. 未知の量である 3 つをあげる.

$$\begin{cases} \text{内部の磁束密度 } B_2 \\ \text{表面電流密度 } \tau \\ \text{中心においた磁気モーメント } m \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\quad (3.13)$$

$$\quad (3.14)$$

この未知の量を求めるための条件は磁束密度 $\mathbf{B}$ と磁場 $\mathbf{H}$ の境界条件と最大経験磁束密度についての条件である.

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \boldsymbol{\tau} \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} \text{最大経験磁束密度 } \mu_0 H_c \end{cases} \quad (3.17)$$

円柱内についての磁束密度について考える. 円柱内は中間状態にあり $\mathbf{B}_0$ 方向に巨視的に一様な磁束密度 B_2 であるとする. したがって超伝導円柱内の磁束密度の r 成分と φ 成分は

$$\begin{cases} B_{2r} = B_2 \cos \varphi \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} B_{2\varphi} = -B_2 \sin \varphi \end{cases} \quad (3.19)$$

となる. また, 円柱外についての磁束密度について考える. ここでは 3.1 のマイスナー効果と同様に一様な磁束密度 B_0 と円柱の中心においた磁気モーメント m が作る磁束密度の和で得られる. 磁束密度の r 成分と φ 成分は

$$\begin{cases} B_{1r} = B_0 \cos \varphi + \frac{\mu_0 m}{2\pi r^2} \cos \theta \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\begin{cases} B_{1\varphi} = -B_0 \sin \varphi + \frac{\mu_0 m}{2\pi r^2} \sin \varphi \end{cases} \quad (3.21)$$

円柱内と円柱外での磁束密度を用いて, $r = a$ における境界条件について考える. 条件式 (3.15) より

$$\left(B_0 + \frac{\mu_0 m}{2\pi a^2} \right) \cos \varphi - B_2 \cos \varphi = 0$$

条件式 (3.16) より

$$\left[\frac{1}{\mu_0} \left(-B_0 + \frac{\mu_0 m}{2\pi a^3} \right) + \frac{1}{\mu_0} B_2 \right] \sin \varphi = \tau$$

条件式 (3.17) は成分 i_φ で角度 φ が $\varphi = \pi/2$ の時に成り立つことより

$$B_0 - \frac{\mu_0 m}{2\pi a^2} = \mu_0 H_c$$

上記 3 つの式が得られる. これより内部磁束密度, 表面電流密度, 磁気モーメントを求める.

$$m = \left(\frac{B_0}{\mu_0} - H_c \right) 2\pi a^2$$

$$B_2 = 2B_0 - \mu_0 H_c$$

$$\tau = 2 \left(\frac{B_0}{\mu_0} - H_c \right) \sin \varphi$$

また磁化 M は m を用いて,

$$M = 2 \left(\frac{B_0}{\mu_0} - H_c \right)$$

と求まる.

3.2.2 従来の磁化 M を用いた場合

超伝導円柱には磁化電流しか流れていないとするので、磁場の強さの平行成分は連続であり、この時の磁化 M を求める。

円柱内の磁束密度と磁場について考える。球内の磁場を H_2 、磁束密度 B_2 とする。球内の磁束密度の r 成分と磁場の φ 成分はそれぞれ、

$$\begin{cases} B_{2r} = \mu_0 (H_2 + M) \cos \varphi & (3.22) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{2\varphi} = -H_2 \sin \varphi & (3.23) \end{cases}$$

となる。

また、円柱外について磁束密度の r 成分、磁場の φ 成分はそれぞれ

$$\begin{cases} B_{1r} = B_0 + \frac{\mu_0 m}{2\pi r^2} \cos \varphi & (3.24) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{1\varphi} = -\frac{B_0}{\mu_0} - \frac{m}{2\pi r^2} \sin \varphi & (3.25) \end{cases}$$

となる。この式を磁化 M を用いて表すと、

$$\begin{cases} B_{1r} = B_0 \cos \varphi + \frac{\mu_0 a^2 M}{2r^2} \cos \varphi & (3.26) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{1\varphi} = -\frac{B_0}{\mu_0} \sin \varphi + \frac{a^2 M}{2r^2} \sin \varphi & (3.27) \end{cases}$$

となる。

表面には磁化電流が流れており、 $r = a$ において円柱外と円柱内の r 成分は連続であるので、

$$\begin{cases} \mu_0 (H_2 + M) = B_0 + \frac{\mu_0 M}{2} & (3.28) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -H_2 = -\frac{B_0}{\mu_0} + \frac{M}{2} & (3.29) \end{cases}$$

となる。円柱内の磁束密度 B_2 は

$$B_2 = 2B_0 - \mu_0 H_c$$

となる。中間状態であることより、内部に磁場 H_c が一様に存在していると考え、このことより磁化 M は、

$$\mu_0 (H_c + M) = B_0 + \frac{\mu_0 M}{2}$$

$$M = 2 \left(\frac{B_0}{\mu_0} - H_c \right)$$

となる。

また円柱の表面に流れる磁化面電流密度は度 τ_m は

$$\tau_m = 2 \left(\frac{B_0}{\mu_0} - H_c \right) \sin \theta$$

となる。これより、一般的な境界条件を用いた場合の面電流密度と等しいことが求められた。

以上より、中間状態においてもマイスナー効果の場合と同様に、超伝導体に真電流が流れた場合に境界条件から求めた磁化 M と超伝導体に磁化電流が流れた場合に従来の磁化 M を用いて求めた磁化 M が等しくなることがわかる。

超伝導円柱のマイスナー効果と中間状態での磁化について図 3.1 にまとめる。

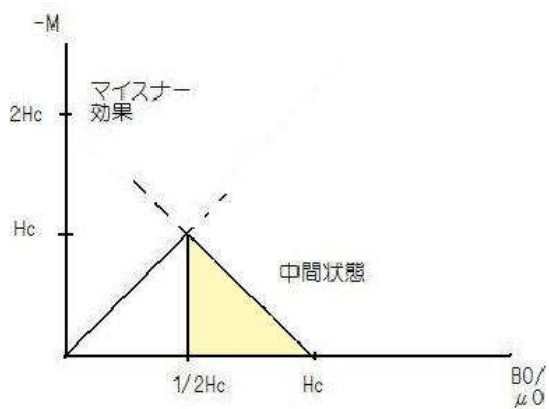


図 3.1: 超伝導円柱の磁化と磁場の関係

第4章 電流の磁気エネルギーの求め方について

超伝導円柱に全電流 I_m を流した時の全磁気エネルギーを求めることを考える。静電エネルギーを求める方法を思い起こせば、このエネルギーは超伝導円柱に電流を流していない状態からスタートして、無限遠から微小電流を少しずつ運び、最終的に超伝導円柱を流れる電流が I_m になるまでの仕事の総和として与えられるはずである。

しかしここで問題が発生する。超伝導円柱に全電流 I_m を流した時の全磁気エネルギーについて求めた値と比べると、正負が逆になる。これは無限遠から電流を運ぶ際に電流が受ける力が引力となるので、負の仕事がなされるためである。この場合重要なことは電荷とは異なって電流を流すための電源回路を繋いだ状態であり、電流が孤立系とはなっていないことである。すなわち、電流回路で仮想変位させる時に生じる誘導起電力に逆らって電流を一定に流し続けるために電源がなさねばならない仕事を考慮する必要がある。

ここで半径 a の無限長の超伝導円柱に電流 I' を流し、これに平行で超伝導円柱の中心から $R_0 (\gg a)$ の位置から微小電流 $\Delta I'$ を超伝導円柱にまで運ぶのに必要なエネルギー (単位長さ当たり) を求める。これから電流 I が 0 から I_m になるまでに必要なエネルギーを求め、式 (4.1) で与えられる磁気エネルギーに等しいことを記す。

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\Phi I = \frac{1}{2L}\Phi^2 \quad (4.1)$$

4.1 電流間の力とエネルギーの関係

まず微小電流 $\Delta I'$ を動かす時にローレンツ力によってなされた仕事 $W_1 (< 0)$ を求める。 F をある距離離れた 2 本の直線導線間に働く単位長さ当たりのローレンツ力であるとする。超伝導円柱には電流 I' が流れているとする。

$$\begin{aligned} W_1 &= - \int F dR \\ W_1 &= - \int_a^{R_0} \frac{\mu_0 I' \Delta I'}{2\pi R} dR \\ &= - \frac{\mu_0 I' \Delta I'}{2\pi} \log \frac{R_0}{a} \end{aligned}$$

次に誘導起電力がある状況で動かしたときに電流変化をさせないために電源がする仕事 W_2 を求める。

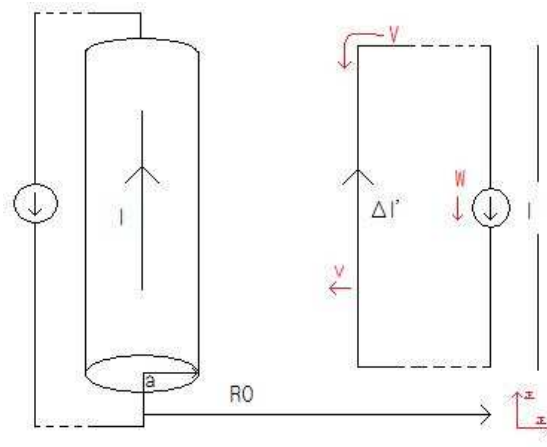


図 4.1: 電流間の力とエネルギーの関係 (電源に接続している)

電流 $\Delta I'$ の速度を $v = -dR/dt$ とする. 電流 I が作る磁束密度は $B = \mu_0 I / 2\pi R$ となり, これらを用いて単位長さ当たりの誘導起電力は $V = -vB$ より求めることができる. 距離 R が $R_0 \rightarrow a$ と変化する過程を考える.

$$V = \frac{\mu_0 I'}{2\pi R} \times \frac{dR}{dt}$$

ここでは電源がする仕事について求めるので, 電源の電力は誘導起電力とは逆に向いている. この電源の起電力を V_E とすると $V_E = -V$ となる. 電源がする仕事は

$$\begin{aligned} \Delta W_2 &= V_E \Delta I' dt \\ &= - \frac{\mu_0 I' \Delta I'}{2\pi R} dR \end{aligned}$$

となり, 電流は無限遠から運ばれてくるため無限遠を R_0 とし, a まで運ぶ時の仕事は

$$\begin{aligned} \Delta W_2 &= - \int_{R_0}^a \frac{\mu_0 I' \Delta I'}{2\pi R} dR \\ &= \frac{\mu_0 I' \Delta I'}{2\pi} \log \frac{R_0}{a} \end{aligned}$$

となる.

ここで電源がする仕事には超伝導円柱に電流を供給する電源の仕事と微小電流回路に電流を供給する電源の仕事との2つがあり, 微小電流回路は a まで運ばれ超伝導円柱と重なりあうためこれらは互いに等しい. 求めた ΔW_1 と ΔW_2 より電流 $\Delta I'$ を超伝導円柱にまで運ぶのに必要なエネルギーを求めると,

$$\begin{aligned} \Delta W &= \Delta W_1 + 2\Delta W_2 \\ &= \frac{\mu_0 I' \Delta I'}{2\pi} \log \frac{R_0}{a} \end{aligned}$$

となる.

ここで超伝導円柱に流れている電流 I' を $0 \rightarrow I_m$ まで変化させるのに必要なエネルギーは

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{I_m} \frac{\mu_0 I'}{2\pi} \log \frac{R_0}{a} dI' \\ &= \frac{\mu_0 I_m^2}{4\pi} \log \frac{R_0}{a} \end{aligned}$$

となる。求めたこのエネルギーが式 (4.1) と等しいことを証明するために超伝導円柱の全磁気エネルギー U_m を求める。

磁束密度は $B = \mu_0 I_m / 2\pi R$ であり、磁束は $\Phi = \int_a^{R_0} (\mu_0 I_m / 2\pi) R dR = (\mu_0 I_m / 2\pi) \log R_0 / a$ となる。この結果を式 (4.1) に代入すると、

$$U_m = \frac{1}{2} \Phi I = \frac{\mu_0 I_m^2}{4\pi} \log \frac{R_0}{a}$$

を得る。よって $W = U_m$ となり等しいことが証明できる。

このことより誘導起電力を考慮した仕事は全磁気エネルギーの公式に等しいことがわかる。

第5章 Poyntingベクトルに関する考察

電磁気学を記述するマクスウェル理論はローレンツ力などの基本的な特性を集約した形で体系的にまとめられたものである。したがってそうした個々の基本的特性はエネルギーなどより根本的な原理から導くことができる。ここではマクスウェルの理論から具体的にローレンツ力を導くことを行ってみる。

ローレンツ力には磁気圧と線張力の2種類ある。この2種類の力が働く様子を図5.1に描く。磁気圧とは磁束密度の勾配をなくすように働く復元力であり、一方、線張力は磁束の曲げをなくすように働く復元力である。これらはそれぞれの矢印の方向に働いている。

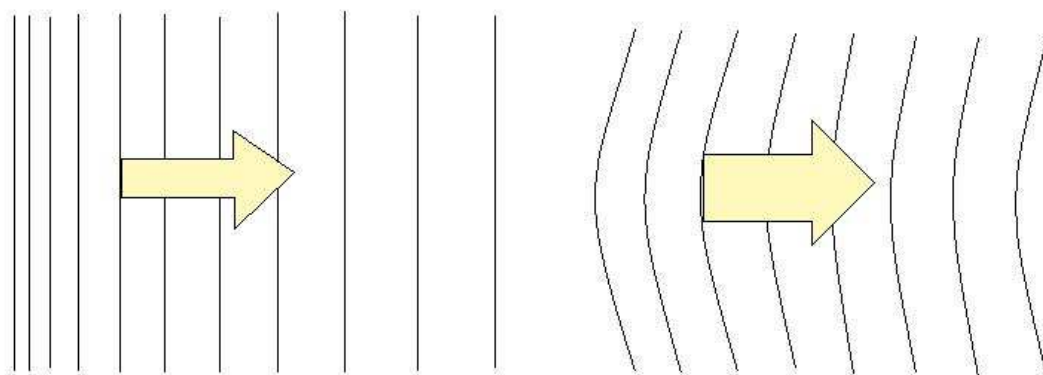


図 5.1: 左:磁束密度の勾配 右:磁束の曲げ

ここではそれぞれ磁気圧のローレンツ力と線張力のローレンツ力についてみていく。またローレンツ力を導く際にコイルに電流を流すことによって磁束を蓄積させる過程でのエネルギーの流れについての理解を深める。

5.1 Poyntingベクトルを用いた計算I

平行磁場中で磁束密度の勾配によって磁気圧の復元力が働く。この復元力がローレンツ力である。ローレンツ力の定義を以下に記す。

超伝導体 ($-d \leq x \leq d$) に以下の磁場と電流をかける.

$$\begin{cases} z \text{ 軸方向に磁場 } H_0 \\ y \text{ 軸方向に電流 (密度 } J) \end{cases} \quad (5.1)$$

また $\mathbf{B} = (0, 0, B(x))$ の中で $\mathbf{J} = (0, J(x), 0)$ が流れるとき, 磁束が受けるローレンツ力を求める. 対称性により, $y - z$ 方向に一様であるので

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} \neq 0$$

が成り立つ.

磁場と磁束密度の関係は

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}$$

となる. また電流密度は

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \mathbf{B} \\ &= - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B(x)}{\partial x} \mathbf{i}_y \end{aligned}$$

となる. これより,

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \times \mathbf{B} &= - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B(x)}{\partial x} B(x) \mathbf{i}_y \times \mathbf{i}_z \\ &= - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B(x)}{\partial x} B(x) \mathbf{i}_x = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{B^2(x)}{2\mu_0} \mathbf{i}_x \end{aligned}$$

が得られる. 最後の結果より, ローレンツ力が磁気エネルギーの勾配を表しており, これが磁気圧に対応することが理解できる.

磁気圧によるローレンツ力の定義が正しいことを証明するために以下の問題について考える. まず, 超伝導体 ($-d \leq x \leq d$) に一様な磁束密度 B_0 が z 軸方向に侵入しているとする. これに磁束密度を同方向に微小量 b_0 だけ増加させ, 内部の磁束分布を図 5.2 のように変化させる. これにより, 電流が流れローレンツ力を発生させることができる.

内部の磁束密度は $\mathbf{B} = (0, 0, B_z(x))$ であり, $B_z(x) = B_0 + ax$ である. ただし $a = b_0(t)/d$ であるとする. b_0 を $b_0 + \Delta b_0$ まで増加させる間 (これに要する時間を Δt であるとする) に空間 x から $x + \Delta x$ までの領域に, 単位面積を通して侵入するエネルギーを求める.

まず電界について考える. マクスウェル方程式

$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.3)$$

これより, 右辺は

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= - \frac{x}{d} \frac{\partial b_0(t)}{\partial t} \mathbf{i}_z \end{aligned}$$

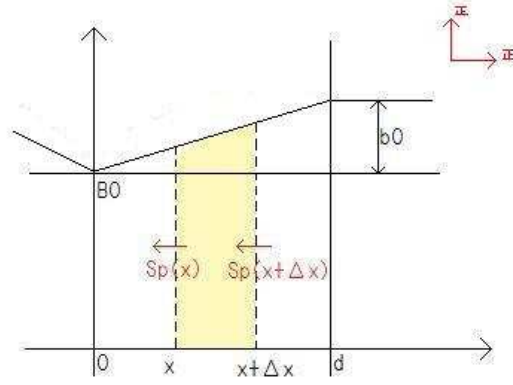


図 5.2: 超伝導体の Poynting ベクトル I

となる．次に左辺の $\text{rot} \mathbf{E}$ について考える．ここで変化するのは x 成分のみであるので $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$ より，

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \text{rot} \mathbf{E} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} E_y \mathbf{i}_z \end{aligned}$$

これより電界を求める．電界は y 軸方向に生じるので求める電界を E_y とする．

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} E_y &= -\frac{x}{d} \frac{\partial b_0(t)}{\partial t} \\ E_y &= -\frac{x^2}{2d} \frac{\partial b_0(t)}{\partial t} + C \quad (C: \text{定数}) \end{aligned}$$

境界条件より 中心 $x = 0$ で $E_y = 0$ となるので $C = 0$ である．よって電界は，

$$E_y = -\frac{x^2}{2d} \frac{\partial b_0(t)}{\partial t} \quad (5.4)$$

次に位置 x における Poynting ベクトル $\mathbf{S}_P(x)$ を求める．

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_P(x) &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\ &= \mathbf{E} \times \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \end{aligned}$$

ここで磁束密度と電界は

$$\mathbf{B} = (B_0 + ax) \mathbf{i}_z, \quad \mathbf{E} = -\frac{x^2}{2d} \frac{\partial b_0(t)}{\partial t} \mathbf{i}_y$$

となり, これより Poynting ベクトル $\mathbf{S}_P(x)$ は

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_P(x) &= \left(-\frac{x^2}{2d} \frac{\partial b_0(t)}{\partial t}\right) \mathbf{i}_y \times \frac{1}{\mu_0} (B_0 + ax) \mathbf{i}_z \\ &= -\frac{1}{2\mu_0 d} (ax^3 + B_0 x^2) \frac{\partial b_0(t)}{\partial t} \mathbf{i}_x\end{aligned}$$

Poynting ベクトル $\mathbf{S}_P(x)$ の成分は x 成分であり, 向きは x 軸に負の方向である.

求めた Poynting ベクトル $\mathbf{S}_P(x)$ を用いて, x から $x + \Delta x$ までの領域に単位時間内に入るエネルギー ΔS_P を求める (ただし $y-z$ 面の単位面積あたり). ここではエネルギーは大きさのみについて考えるので, 向きを考慮して求めると,

$$\begin{aligned}\Delta S_P &= S_P(x + \Delta x) - S_P(x) \\ &= \frac{1}{2\mu_0 d} (3ax^2 + 2B_0 x) \frac{\partial b_0(t)}{\partial t} \Delta x\end{aligned}$$

となる. 求めた Poynting ベクトル ΔS_P を用いて, $b_0 \sim b_0 + \Delta b_0$ の変化の間に入ったエネルギー ΔF について求める.

$$\Delta F = \Delta S_P \times \Delta t$$

ここで $\Delta b_0 = (\partial b_0(t)/\partial t) \Delta t$ また $a = b_0/d$ より, 入ったエネルギーは

$$\Delta F = \frac{1}{2\mu_0 d} \left(\frac{3}{d} b_0 x^2 + 2B_0 x\right) \Delta x \Delta b_0$$

となる.

またこの間にこの領域で増加した磁気エネルギーについて考える. このエネルギーを ΔF_B とすると,

$$\begin{aligned}\Delta F_B &= \int_x^{x+\Delta x} \frac{1}{2\mu_0} [B^2(t + \Delta t) - B^2(t)] dx \\ &= \frac{1}{2\mu_0 d} \left(\frac{2}{d} b_0 x^2 + 2B_0 x\right) \Delta x \Delta b_0\end{aligned}$$

となる.

求めた2つのエネルギーより使われたエネルギーを求めることができる. 使われたエネルギーは

$$\Delta F - \Delta F_B = \frac{x^2 b_0}{2\mu_0 d^2} \Delta x \Delta b_0 \quad (5.5)$$

である.

以上より 求めた使われたエネルギーはローレンツ力の仕事であると考え. 次にローレンツ力がする仕事について考える.

この間にこの領域内で行われたローレンツ力の仕事について考える. まず, 幅 Δx の空間で, 時間変化 $b_0 \rightarrow b_0 + \Delta b_0$ の間に増える磁束量 $\Delta \Phi$ を求める.

$$\begin{aligned}\Delta \Phi &= \left[B_0 + \frac{b_0 + \Delta b_0}{d} x - \left(B_0 + \frac{b_0}{d} x \right) \right] \Delta x \\ &= \frac{\Delta b_0}{d} x \Delta x\end{aligned} \quad (5.6)$$

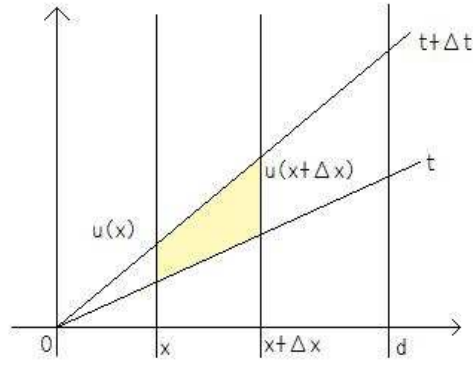


図 5.3: 超伝導体の磁束量変化 I

この磁束の変化は磁束の変位によるものであると考える. したがって, 次に磁束の変位について考える. 磁束の変位として $u(x)$ (x 軸方向に負の変位) を定義する. x から出る磁束量は $B(x)u(x)$, また $x + \Delta x$ から入る磁束量は $B(x + \Delta x)u(x + \Delta x)$ である (いずれも y 軸方向の単位長さ当り). この2 つにより中で増える磁束量を求めることができる. 増える磁束量を $\Delta\Phi$ とする.

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= B(x + \Delta x)u(x + \Delta x) - B(x)u(x) \\ &\simeq B(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x}\Delta x\end{aligned}\tag{5.7}$$

求めた2 つの磁束の増加量は等しくならなければならないので,

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{\Delta b_0}{B(x)d}x$$

が成立ち, これより磁束の変位 $u(x)$ を求めることができる. ただし $B(x)$ は一定であると考え,

$$\begin{aligned}u(x) &= \int \frac{\Delta b_0}{B(x)d}x dx \\ &= \frac{\Delta b_0}{2B(x)d}x^2 + c \quad (c: \text{定数})\end{aligned}$$

となる. $x = 0$ で $u(x) = 0$ であるという境界条件より, 磁束の変位は

$$u(x) = \frac{\Delta b_0}{2B(x)d}x^2\tag{5.8}$$

となる. Δx 間のローレンツ力がする仕事は $f u(x)\Delta x$ より求まる. この仕事は Poynting ベクトルより求めた仕事と等しい. またローレンツ力の向きを考慮して考えると,

$$f u(x)\Delta x = \frac{x^2 b_0}{2\mu_0 d^2}\Delta x \Delta b_0$$

より

$$f = \frac{b_0}{\mu_0 d} B(x)$$

を得る. 一方, 定義よりローレンツ力は

$$JB = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B(x)}{\partial x} B(x) = \frac{b_0}{\mu_0 d} B(x)$$

となり, 求めた f がローレンツ力であることがわかる. これより Poynting ベクトルから磁気圧の復元力によるローレンツ力を求められることが示された.

5.2 Poynting ベクトルを用いた計算 II

次に線張力によるローレンツ力の定義を以下に記す.

超伝導体 ($-d \leq z \leq d$) に以下のように磁場と電流をかける.

$$\begin{cases} z \text{ 軸方向に磁場 } H & (5.9) \\ y \text{ 軸方向に電流 (密度 } J) & (5.10) \end{cases}$$

電流密度は一様であるとするので, 超伝導体の x 軸方向の単位長さ当りの電流は $I = 2Jd$ となる. このとき形状効果のため, 磁束は超伝導体に一様に侵入する. 次に電流を流すと, これにより x 軸方向の磁束が生じ, この密度を $B_x(z)$, その表面の値を b とする. これにより磁束の曲がりが生じる. したがって超伝導体中の磁束密度及び電流密度の分布は $\mathbf{B} = (B_x(z), 0, B_0)$, $\mathbf{J} = (0, J, 0)$ となる. ここで電流を十分小さくすると $b \ll B_0$ とすることができる. またこの曲がり無くそうとローレンツ力が発生する.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z} \neq 0$$

電界と磁束密度の関係は,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}$$

となる.

以上より, 超伝導体内の電流密度は,

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{\mu_0} (\text{rot } \mathbf{B})_y \\ &= \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_x(z)}{\partial z} \end{aligned}$$

となる. したがって, $B_x(z) = \mu_0 J z = (b/d)z$ となる. これより x 成分と z 成分それぞれのローレンツ力を求める.

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_x(z)}{\partial z} B_x(z) \mathbf{i}_z + \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_x(z)}{\partial z} B_0 \mathbf{i}_x = -\frac{b^2}{\mu_0 d^2} z \mathbf{i}_z + \frac{b}{\mu_0 d} B_0 \mathbf{i}_x$$

線張力によるローレンツ力の定義が正しいことを証明するために以下の問題について考える.
 b を $b + \Delta b$ まで増加させる間 (これに要する時間を Δt であるとする) に空間 z から $z + \Delta z$ までの領域に, 単位面積を通して侵入するエネルギーを求める.
 まず電界について考える. マクスウェル方程式

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

より求める.

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} \mathbf{i}_x \\ &= -\frac{z}{d} \frac{\partial b}{\partial t} \mathbf{i}_x \end{aligned} \quad (5.11)$$

次に左辺の $\text{rot} \mathbf{E}$ について考える. ここで変化するのは z 成分のみであるので, $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$ より

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \text{rot} \mathbf{E} \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} E_y \mathbf{i}_x \end{aligned} \quad (5.12)$$

これより電界を求める. 電界は y 軸方向に生じるので求める電界を E_y とする.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} E_y &= \frac{z}{d} \frac{\partial b}{\partial t} \\ E_y &= \frac{z^2}{2d} \frac{\partial b}{\partial t} + C \quad (C: \text{定数}) \end{aligned}$$

境界条件より $z = 0$ で $E_y = 0$ となるので $C = 0$ である. よって

$$E_y = \frac{z^2}{2d} \frac{\partial b}{\partial t} \quad (5.13)$$

次に位置 z に置ける Poynting ベクトル $\mathbf{S}_P(z)$ を求める.

まず x 方向成分 B_x による Poynting ベクトルは

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{P1}(z) &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{z^2}{2d} \frac{\partial b}{\partial t} \mathbf{i}_y \times \frac{b}{\mu_0 d} z \mathbf{i}_x \\ &= -\frac{z^3 b}{2\mu_0 d^2} \frac{\partial b}{\partial t} \mathbf{i}_z \end{aligned} \quad (5.14)$$

である.

次に z 方向成分 B_z による Poynting ベクトルは

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{P2}(z) &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{z^2}{2d} \frac{\partial b}{\partial t} \mathbf{i}_y \times \frac{B_0}{\mu_0} \mathbf{i}_z \\ &= \frac{z^2 B_0}{2\mu_0 d} \frac{\partial b}{\partial t} \mathbf{i}_x \end{aligned} \quad (5.15)$$

である. 式 (5.15) の Poynting ベクトル $S_{P2}(z)$ は x 方向に一定で流れ続けるため, エネルギーが増えることがない. したがってこれを考慮する必要はなく, 式 (5.14) のみを考慮する.

空間 z から $z + \Delta z$ までの領域から単位時間内に出る Poynting ベクトル ΔS_P (ただし $x - y$ 面の単位面積あたり) を求める (図 5.4).

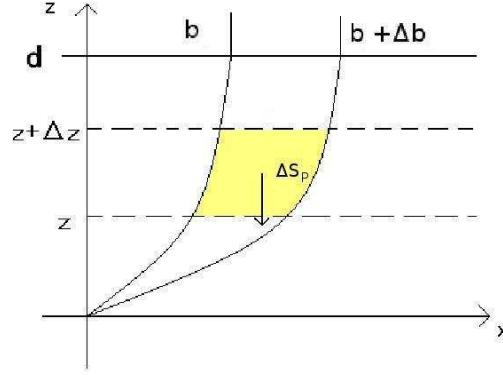


図 5.4: 超伝導体の Poynting ベクトル II

$$\begin{aligned}\Delta S_P &= S_P(z + \Delta z) - S_P(z) \\ &= -\frac{3b}{2\mu_0 d^2} \frac{\partial b}{\partial t} z^2 \Delta z\end{aligned}$$

ΔS_P は空間 z から $z + \Delta z$ までの領域に単位時間に入るエネルギーであることがわかる.

時間変化 $t \rightarrow t + \Delta t$ 間つまり, 磁束密度 b を $b + \Delta b$ まで増加させる間に入ったエネルギーは

$$\begin{aligned}\Delta F &= - \int_{b+\Delta b}^b \Delta S_P \times \Delta t \\ &= \frac{3z^2 \Delta z}{2\mu_0 d^2} \int_{b+\Delta b}^b b(t) \frac{\partial b}{\partial t} \Delta t \\ &= \frac{3z^2 \Delta z}{2\mu_0 d^2} b \Delta b\end{aligned}$$

である. このエネルギーは単位面積当たりのエネルギーである.

次に磁束密度 b を $b + \Delta b$ まで増加させる間, また空間 $z \rightarrow z + \Delta z$ 間の磁気エネルギーの増加 ΔF_B について考える. このエネルギーは蓄積されたエネルギーである.

$$\begin{aligned}\Delta F_B &= \int_{z+\Delta z}^z \frac{1}{2\mu_0} \left[\left(\frac{b+\Delta b}{d} z \right)^2 - \left(\frac{b}{d} z \right)^2 \right] dz \\ &= \int_{z+\Delta z}^z \frac{b\Delta b}{\mu_0 d^2} z^2 dz \\ &= \frac{b\Delta b}{\mu_0 d^2} z^2 \Delta z\end{aligned}$$

求めた 2つのエネルギーより 使われたエネルギーは

$$\Delta F - \Delta F_B = \frac{z^2 \Delta z}{2\mu_0 d^2} b \Delta b$$

である.

次にローレンツ力がする仕事について考える.

位置 z での時間変化 $b \rightarrow b + \Delta b$ 間のローレンツ力の仕事について考える (図 5.5).

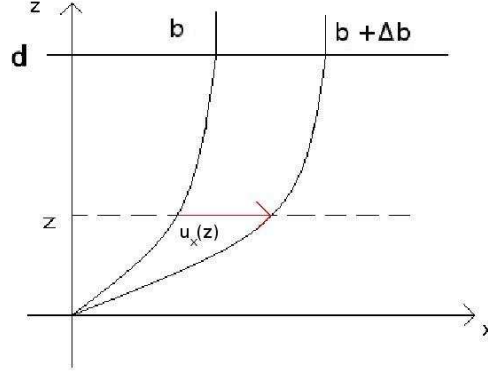


図 5.5: 超伝導体の磁束量変化 II

磁束の連続の式は,

$$\text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{V}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.16)$$

であることより, 磁束量を求める. これを Δt の間で時間積分すると,

$$\text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{u}) = -\Delta \mathbf{B}$$

となる. まず左辺について考える.

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \text{rot}[(B_0 \mathbf{i}_z) \times (u_x(z) \mathbf{i}_x)] \\ &= \text{rot}(B_0 u_x(z) \mathbf{i}_y) \\ &= B_0 \frac{\partial u_x(z)}{\partial z} \mathbf{i}_x \end{aligned}$$

次に右辺について考える.

$$\text{右辺} = \frac{\Delta b}{d} z \mathbf{i}_x \quad (5.17)$$

となり, これによって磁束の変位を求めることができる.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta b}{d} z &= B_0 \frac{\partial u_x(z)}{\partial z} \\ u_x(z) &= \frac{\Delta b}{2B_0 d} z^2 \end{aligned}$$

ただし, $z = 0$ で $u_x = 0$ という条件を用いた. 求めた磁束の変位を用いて空間範囲 Δz に働くローレンツ力を求める. これは Poynting ベクトルから求めた使われたエネルギーと等しいことより,

$$u_x(z)F\Delta z = \frac{z^2\Delta z}{2\mu_0 d^2}b\Delta b$$

より,

$$F = \frac{b}{\mu_0 d}B_0$$

を得る. 一方, 定義よりローレンツ力は

$$JB = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial b}{\partial z} B_0 = \frac{b}{\mu_0 d} B_0$$

となり, 求めた F がローレンツ力であることがわかる. これより Poynting ベクトルから線張力の復元力であるローレンツ力を求められることが示された.

謝辞

本研究を行うにあたって多大な御指導・助言をいただいた松下先生, 小田部先生, ならびに同研究室の方々に深く感謝致します.

参考文献

- [1] 松下照男:「新電磁気学」,コロナ社,(2004)