

有限要素法による
超伝導体の交流通電損失の数値解析

渡辺 忠明

2003年2月25日

電子情報工学科

目次

第 1 章	序論	1
1.1	はじめに	1
1.2	Y-123 超伝導体	2
1.3	限流器 (Fault current limiter)	3
1.4	交流損失	4
1.5	超伝導トランス	5
1.5.1	500 A トランス	5
1.6	磁束クリープ	8
1.7	本研究の目的	10
第 2 章	有限要素法による数値解析	12
2.1	有限要素法	12
2.1.1	磁気ベクトルポテンシャルと電位を用いた方程式 ($A-\phi$ 法)	13
2.2	モデル	15
2.2.1	モデル 1(円断面超伝導体)	15
2.2.2	モデル 2(矩形断面超伝導体)	15
第 3 章	シミュレーションおよび結果検討	17
3.1	FEM によるシミュレーション結果	17
3.2	超伝導体の形状依存性	17
3.3	超伝導体の n 値依存性	26
3.3.1	FEM の定性的評価	26
3.3.2	FEM の定量的評価	26
3.4	まとめ	31
第 4 章	結論と今後の課題	32

付録 A 付録	33
A.1 FEM の信頼性の確認	33
A.2 超伝導体の磁界依存性	37
参考文献	40

図目次

1.1	低温における超伝導体の抵抗の消失。	2
1.2	液体窒素中で動作する 500 A 級超伝導トランス。	6
1.3	液体窒素中で動作する 500 A 級超伝導トランスの概略図。	7
1.4	磁化の緩和。	8
1.5	磁束バンドルの位置に対するエネルギー変化の概念図。	9
1.6	500 A トランスによる損失の電流依存性。	11
2.1	円柱状超伝導体のモデル概要。	15
2.2	円柱状超伝導体の 1/360 モデル。	15
2.3	アスペクト比 1 の矩形断面超伝導体のモデル概要。	16
2.4	アスペクト比 1 の矩形断面超伝導体の 1/4 モデル。	16
3.1	矩形断面の各アスペクト比による損失と円断面での損失との比較。	18
3.2	aspect 比 2 の磁束分布。	19
3.3	aspect 比 4 の磁束分布。	19
3.4	aspect 比 8 の磁束分布。	19
3.5	aspect 比 16 の磁束分布。	20
3.6	aspect 比 32 の磁束分布。	20
3.7	aspect 比 64 の磁束分布。	20
3.8	我々が仮定している理論 (無限平板) での電流密度分布 (左)、および磁界の侵入方向 (左上)、Norris の strip モデル (有限幅の無限長平板) での電流密度分布 (右)、および磁界の侵入方向 (右上)。	23
3.9	$I_p = 400$ A での損失とアスペクト比の関係。	24
3.10	$I_p = 800$ A での損失とアスペクト比の関係。	25
3.11	円断面の超伝導体における各 n 値での損失と Bean モデルの比較。	27

3.12	損失の n 値依存性。	28
3.13	FEM と理論的見積もりとの比較。	30
A.1	FEM で解析する無限長の円柱状超伝導体の概形。	33
A.2	FEM で解析する無限長の円柱状超伝導体の 1/360 モデル。	34
A.3	FEM で用いた磁界依存性。	35
A.4	64,800 A 通電時の Bean モデルでの超伝導体内部の磁束分布の様子。	36
A.5	25,200 A 通電時の Kim モデルでの超伝導体内部の磁束分布の様子。	36
A.6	円断面超伝導体の Bean モデルおよび Kim モデルでの損失の比較。	38

第 1 章 序論

1.1 はじめに

1911 年オランダの H. Kamerlingh Onnes(カメリン・オンネス)は水銀の電気抵抗が約 4 K で突然ゼロになるという現象を発見し、これを超伝導現象と名付け、このような常伝導状態から超伝導状態に転移する温度を T_c と定義した(図 1.1)。その後、金属や合金などの様々な超伝導体が発見され、実験的・理論的研究がなされてきた。1957 年には超伝導発現機構を説明する BCS 理論が登場し、これ以降、超伝導の研究は目覚ましい進歩を遂げ様々な応用化が期待された。現在、既に実用化されているものとしては、医療用 MRI や産業用超伝導マグネット、高精度磁気センサーなどが挙げられるが、これらに使われている超伝導体は金属超伝導体であり T_c が低く冷却コストがかかる。

そこで、現在、注目されているものが酸化物超伝導体の実用化である。この酸化物超伝導体は高温超伝導体と呼ばれ、1986 年、スイスで発見され、現在までに T_c が 130 K を越える物質も発見されている。これらの高温超伝導体の多くは液体窒素の沸点 (77.3 K) を大きく越えた T_c を持つ。そのため、酸化物超伝導体は金属超伝導体と比べ高い温度で使用できるため、冷却コストが削減できたり、冷却コストを含めて小型軽量化が可能となるという利点がある。

酸化物超伝導体の中でも Bi 系超伝導体は、 c 軸方向に比べて a - b 平面内の結晶成長が著しく早いことから、容易に薄い板状結晶が得られることが経験的に知られている。よって超伝導状態で流し得る最大の電流密度である臨界電流密度 J_c の低減の原因となる結晶粒間の弱結合の影響が少なく、かつ線材化が容易なことからマグネットなどの線材として使用されているが、高温領域ではわずかな磁界の下でも J_c が減少するという欠点がある。

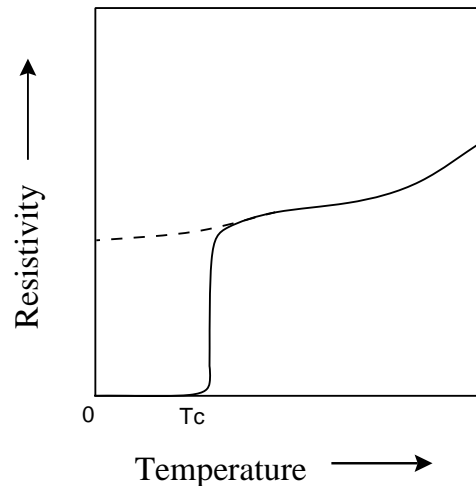


図 1.1. 低温における超伝導体の抵抗の消失。

これは、量子化磁束がローレンツ力により動こうとするのを止める力(ピンニング力)が弱いことに起因している。

一方、Y系超伝導体はピンニング力は強いが、結晶軸の配向性が悪いことから結晶界面である弱結合の影響を大きく受けるという問題がある。そこでこの問題点を解消するために熔融法が用いられた。熔融法によるY-123超伝導体は高磁界下でも高い電流密度で大電流を流すことができ様々な応用が期待されている。

1.2 Y-123 超伝導体

Y系超伝導体はピンニング力は強いが、結晶軸の配向性が悪いことから結晶界面において弱結合の影響を強く受けるという問題がある。そこでこの材料内から弱結合性をもった結晶界面を排除するためには、熔融法が有効である。この方法はY-123全体で一つの大きな粒とする方法である。最初に熔融プロセスをY系に用いた方法としてMTG(Melt-Textured Growth)法がある。MTG法は、Y:Ba:Cu=1:2:3に配合された仮焼粉を1300°C程度まで過熱し、温度勾配をつけながら徐冷する。この方法により、焼結法の問題点である弱結合を解消すると共に、温度勾配下で凝固することによって配向性が向上させることができる。しかし、数10 μmの粗大な常伝導相(211相)粒が存在するためピン止め効率が悪く、超伝導電流の妨げになるためこの粗大な211相を改善する必要があった。そこでそれを改善するためにとられた方法がQMG(Quench and Melt Growth)法¹⁾である。QMG法

はMTG法に Quench(急冷) という過程を加えて改良したもので、この急冷過程によってできる微小な Y_2O_3 を核として微細な 211 相を晶出させ、その後、1~20 °C/h の冷却速度で徐冷する。この方法により、MTG 法と比べ微細な 211 相ができ、ピン止め効率が向上する事できた。また、211 相の微細化はクラックの発生を抑える効果もある。この製法による QMG 材は高磁界下でも高い電流密度で大電流を流すことが可能であり、様々な応用が期待されている。

1.3 限流器 (Fault current limiter)

限流器とは通常はほとんど損失なく電流を流し、定格電流以上の過電流、故障電流が電力系統に流れこもうとすると特定の部分の回路パスを開放し、それらが治まるとすみやかにパスを短絡させる機能をもった素子のことである。

また、酸化物超伝導体を用いた限流器には主に磁気遮蔽型と抵抗型の二つの型がある。まず磁気遮蔽型とは、超伝導円筒の磁気遮蔽効果を利用して、超伝導円筒の外側にあるコイルのインダクタンスを変化させることにより限流する方式である。また抵抗型とは、通常は超伝導状態で抵抗がほぼゼロであるが、超伝導体に臨界電流 (I_c) を越える電流が流れたときには、常伝導状態に転移し抵抗を発生してそれにより限流する方式である。最近では、酸化物超伝導体薄膜を用いた抵抗型の限流器も開発されている。しかし、この限流器の臨界電流は低いので大電流を流す場合には適していない。そこで、臨界電流の大きいバルク酸化物超伝導体を用いたものが限流器の候補として考えられている。このバルク酸化物超伝導体を用いた限流器の問題の一つは、大電流を通電するため超伝導状態から常伝導状態へ抵抗転移したときのジュール熱による超伝導体の可塑的損傷が挙げられる。この問題を解決するために超伝導体を金属被覆することが考えられた。これにより、焼損の問題は大幅に改善されたが、金属被覆は単位長さ当りの抵抗率を減少させるため、限流器としての機能を低下させてしまう。しかし、これに関しては形状をミアンダ形状にすることにより抵抗を大きくすることができる。

一方で、実際の応用において交流電流を通電するため、1.4節で述べる交流損失が問題になり、交流損失の低減が求められる。従って交流損失を

正確に測定し、理論による予測値と比較し、それらの結果を限流器設計に役立てることが求められている。

1.4 交流損失

直流定常状態において超伝導体は I_c 以下の電流を無損失で流すことができるが、交流もしくは変動する直流電流であれば J_c 以下であっても損失は生じる。このような損失が生じる理由は、交流もしくは変動する条件下においては磁束線が超伝導体内で動き、 $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}$ で与えられる誘導起電力が生じるためである。ここでの \vec{v} は磁束線の速度である。すなわち、この損失の機構は ohmic な常伝導金属と同様である。その損失は銅損のように交流の一周期当りの損失が周波数に比例する性質のように思えるが、実際には周波数に依存しないヒステリシス (ピンニング) 損失である。実際の超伝導線材においては、シース導体内での渦電流損失や結合損失も発生するが、一般に 1 kHz 以下程度の周波数の交流電流損失の大部分はヒステリシス損失となることが報告されている。

このような交流損失を表現する理論式として Norris の式²⁾ が用いられる。この Norris の式は無限長の楕円柱状超伝導体の軸方向に交流電流した場合の一周期当りの交流損失の解析解である。ただし、 J_c の値は局所的な磁界の強さによらず一定であるという Bean モデルを仮定している。以下にその理論式を示す。

$$W = \frac{\mu_0 I_c^2}{\pi S} \left\{ i \left(1 - \frac{i}{2} \right) + (1 - i) \log(1 - i) \right\} \quad (1.1)$$

ここで、 μ_0 は真空透磁率、 S は通電方向の断面積、 i は通電電流 I_p を臨界電流で規格化 (I_p/I_c) したものである。

しかし、実際の超伝導体の J_c は外部磁界の変化にともなって変化するため、Bean モデルは現実的なモデルであるとはいえない。さらに、交流電流する超伝導体の断面は楕円断面ではないため、Norris の式は物理的に問題があるように思われる。ところが Norris の式は、上式のような簡単な数式で矩形断面の超伝導体の交流損失をよく表現できていることから、多くの研究機関では交流損失の見積もりとして Norris の式を用いている。

一方、熔融法によって作られた Y-123 バルク超伝導体の臨界電流は数 100 A を越えているものもあり、十分な大きさの輸送電流における損失の

判定は容易ではない。このような測定において、小型超伝導トランスは電流源として有用である。

1.5 超伝導トランス

超伝導体の交流機器への応用は、エネルギー、輸送システム、医療機、デバイス等、さまざまな分野での期待がよせられている。その中の一つにトランスへの応用がある。トランスは電力機器の中で最も完成度の高い装置といわれている。これを超伝導化するには経済性の確保はもとより電力系統内での他面的な運用に耐える高い信頼性が要求される。しかし、トランスに超伝導を応用した場合、トランスは静止機器であることや、交流機器中での超伝導体の電磁気的環境が模擬しやすいという利点があることから、広範囲における基礎研究が進められている。

一方で、酸化物超伝導体による液体窒素温度領域の交流導体が開発されると、機器の経済性をはじめ、電気絶縁や系統事故対策等で、金属系超伝導機器と比べると有利になる点が多い。既に本研究室でも、交流損失を測定するための小型交流電源として用い、Bi-2223 銀シース多芯線材を用いた液体窒素冷却による 500 A クラスの小型超伝導トランスを作製し、Y-123 バルク超伝導体の交流損失の測定に成功している。それについては次節で説明する。

1.5.1 500 A トランス

図 1.2 は、以前に本研究室で作製された液体窒素中で動作する 500 A 級の超伝導トランスである⁴⁾。また概略図は図 1.3 に示している。このトランスは、二次巻線に Bi-2223 テープ線材を用いており、二次巻線にはそれぞれのテープ線材に電流が均一に流れるように転位が施してある。このトランスの変流比は約 100 倍であり、二次側に 500 A 超の電流を流すことができる。上記の超伝導トランスを用いて、液体窒素温度 (77.3 K) での Y-123 バルク超伝導体の交流損失の測定が行われており、交流損失測定用の交流電流源として、超伝導トランスの有効性が実証されている。また、これを用いる利点として、通電電流が超伝導体の I_c を超えてクエンチしても、一次側回路のインピーダンスが著しく大きくなり、二次側の電流がすみやかに減衰するため、試料にダメージを与えないことが挙げられる。

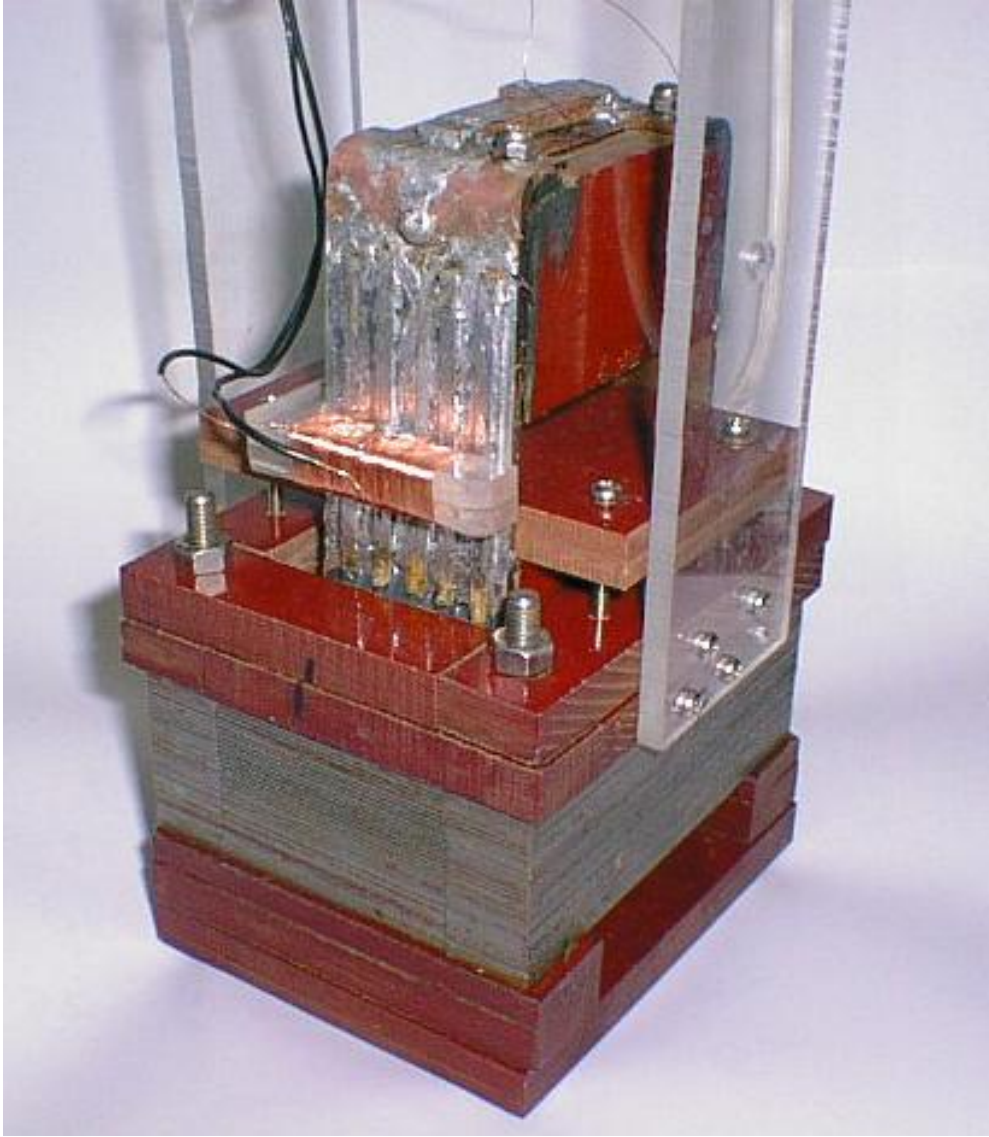


図 1.2. 液体窒素中で動作する 500 A 級超伝導トランス。

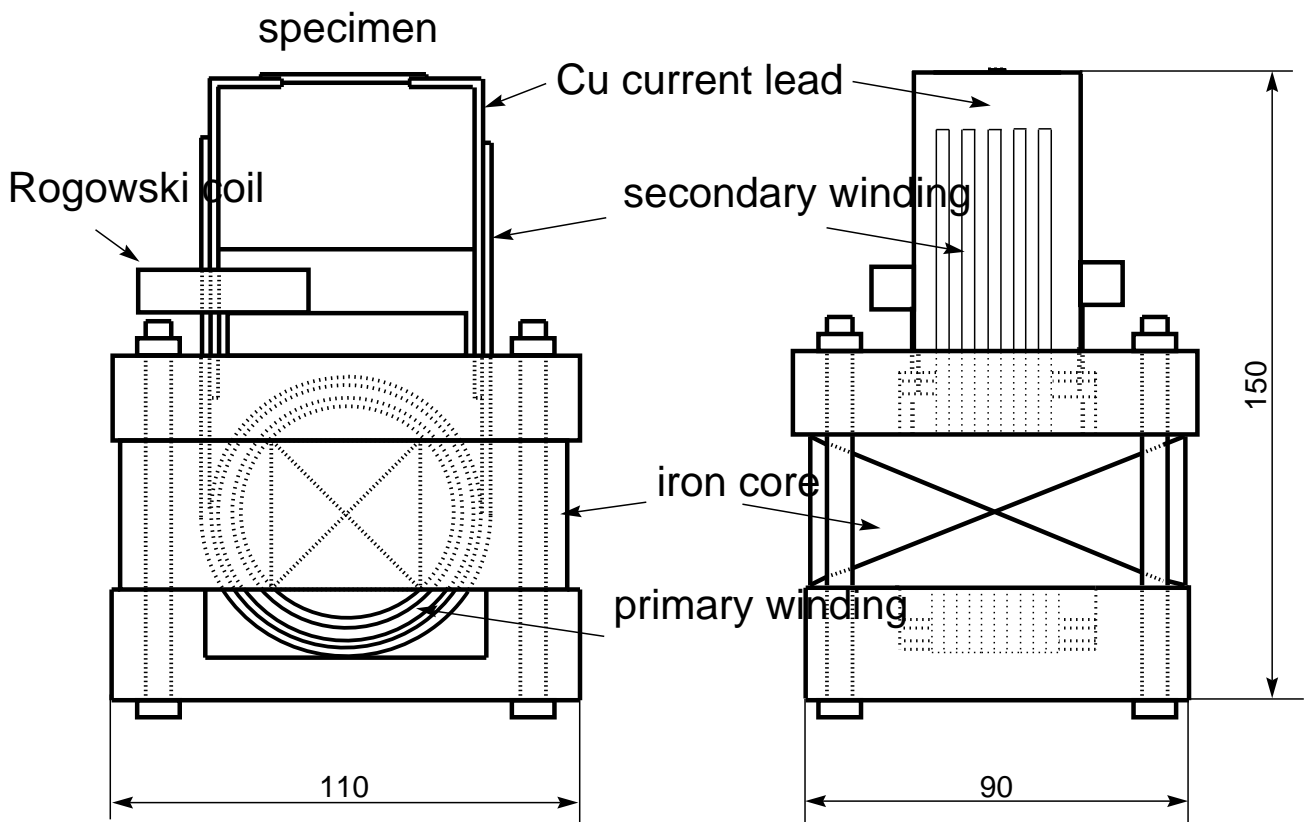


図 1.3. 液体窒素中で動作する 500 A 級超伝導トランスの概略図。

1.6 磁束クリープ

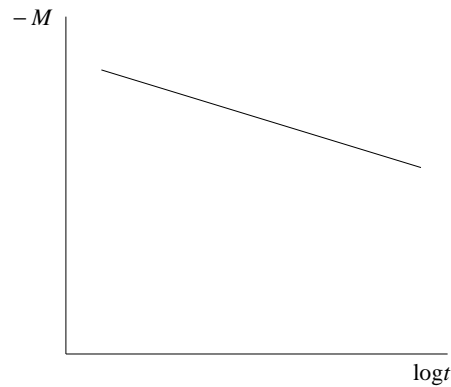


図 1.4. 磁化の緩和。

磁束クリープとは、ピン止めされた磁束線が熱揺動によりある確率でピンポテンシャルを飛び出す現象である。この現象の影響が顕著に現れるのは、超伝導永久電流の緩和である。これは磁束線がピンニングセンターに捕らえられている状態は、エネルギーの局所的な極小に対応した準安定状態でしかなく、真の平衡状態に向けての緩和、すなわち遮蔽電流の減衰が起こる。この緩和において特徴的なことは、図 1.4 のように減衰が時間に対して対数的であることである。遮蔽電流の減衰は、超伝導体内の磁束分布の変化に対応している。熱活性化による磁束線の運動とは、磁束フローのような磁束格子全体の連続的な運動ではなく、一部の磁束線による不連続なものであると考えられている。また、運動する磁束線の集団を磁束バンドルと呼ぶ。

いま、電流が流れている状態での一つの磁束バンドルを考える。その磁束バンドルを Lorentz 力の方向に仮想的に変位させていった場合のエネルギーの変化は図 1.5 のようになると考えられる。図の谷の部分 A および C が、ピンニング・センターに相当し、この図では A の部分に捕まっている磁束バンドルに注目している。全体として右下がりになっているのは Lorentz 力による仕事を考慮したためである。磁束バンドルが捕まっているピンニング・センターからはずれるためには B 点のエネルギーバリアを越えなければならない。熱エネルギー $k_B T$ がエネルギーバリア U よりも十分小さければ、このバリアを越える確率は Arrhenius の式 $\exp(-U/k_B T)$ で与えられる。また、一度の跳躍で移動する距離 a は、となりのピンニング・センターであるエネルギーの谷 C までの距離であるが、バンドルのエネルギー状態

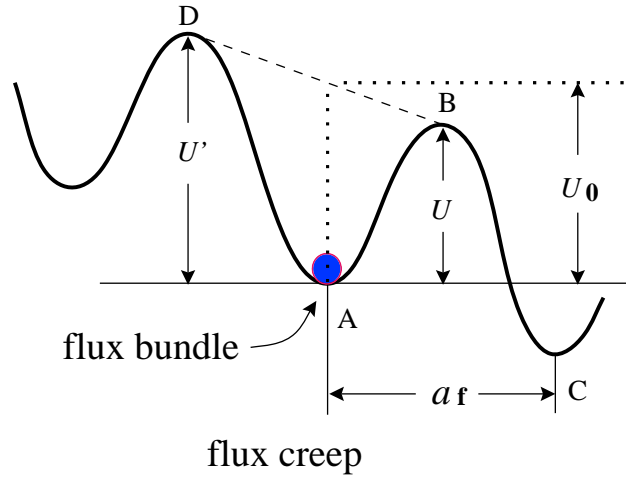


図 1.5. 磁束バンドルの位置に対するエネルギー変化の概念図。

はその磁束線格子間隔 a_f だけの変位に対してほぼ周期的になると考えられるので、 a は a_f 程度としてよいであろう。したがって、熱揺動による磁束バンドルの振動周波数を ν_0 とすると、Lorentz 力方向への平均の磁束線の移動速度 v_+ は

$$v_+ = a_f \nu_0 \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right) \quad (1.2)$$

となる。一方、Lorentz 力とは逆向方向に跳ぶ場合も考えられ、D 点のエネルギーバリアを U' とすると、このときの平均の磁束線の移動速度 v_- は

$$v_- = -a_f \nu_0 \exp\left(-\frac{U'}{k_B T}\right) \quad (1.3)$$

となる。結局、全体としての平均の磁束線の移動速度 v は $v_+ + v_-$ で表され

$$v = a_f \nu_0 \left[\exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right) - \exp\left(-\frac{U'}{k_B T}\right) \right] \quad (1.4)$$

となる。したがって $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}$ の関係より

$$E = B a_f \nu_0 \left[\exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right) - \exp\left(-\frac{U'}{k_B T}\right) \right] \quad (1.5)$$

の電界が発生し、すなわち超伝導体に電気抵抗が発生している事を示している。このため、遮蔽電流が時間とともに減衰し、磁化の緩和が起こる。

1.7 本研究の目的

図 1.6は損失の電流依存性を表している。白黒のシンボルは QMG 法による Y-123 バルク酸化物超伝導体の各周波数での実験結果である。なお、試料は $1.0 \times 0.5 \text{ mm}^2$ の矩形断面となっており、長さは 10 mm で、500 A の超伝導トランスを用いて測定した。次に、 J_c の磁界依存性を考えるため以下の式で定義される Irie-Yamafuji モデルを仮定した。

$$J_c = \alpha B^{\gamma-1} \quad (1.6)$$

ここで、 α と γ はフィッティングパラメータであり、図 1.6 の実線は (1.6) 式において $\alpha = 7.0 \times 10^7$ 、 $\gamma = 0.8$ としたときの Irie-Yamafuji モデルの理論曲線を示しており、無限長円柱状超伝導体の長さ方向への通電を仮定している。また、これらのパラメータは通電電流の実験での自己磁界の最大値が 0.05 T より小さいことから、その磁界領域での磁化ヒステリシスから評価した J_c - B 特性の結果とよく一致するように決めたものである。また、破線は、無限長楕円柱状超伝導体への長さ方向への通電を仮定している Norris の式である。Norris の式では J_c は一定であるという Bean モデルを仮定しており、ここでは (1.6) 式の $\gamma = 1$ 、 $\alpha = 2.6 \times 10^8$ としている。なお、このパラメータも Irie-Yamafuji モデルの場合と同様に実験結果と磁化ヒステリシスから評価した J_c - B 特性の結果とよく一致するように決めたものである。しかし、QMG 法による Y-123 の各周波数での実験結果に対し Irie-Yamafuji モデルの理論曲線は Norris の式よりも低電流領域で大きくずれていた。このズレは超伝導体試料の形状効果と高温超伝導体の複雑な特性によると考えられる。それには、磁束クリープや J_c の磁界依存性、異方性などのようなものがあり、理論的解析にこれらの特性を考慮に入れた自己無矛盾の磁束分布解を求めることは非常に難しい。そこで有限要素法 (Finite Element Method) を用いて超伝導体内部の現象をシミュレートし、交流損失を数値解析により求めることは有用である。

そこで、本研究では、 J_c の磁界依存性、試料の形状依存性、磁束クリープの影響として n 値モデルを考慮し、交流損失を数値的に求め、これらが交流損失にどのような影響を与えるかを考察することを目的とする。

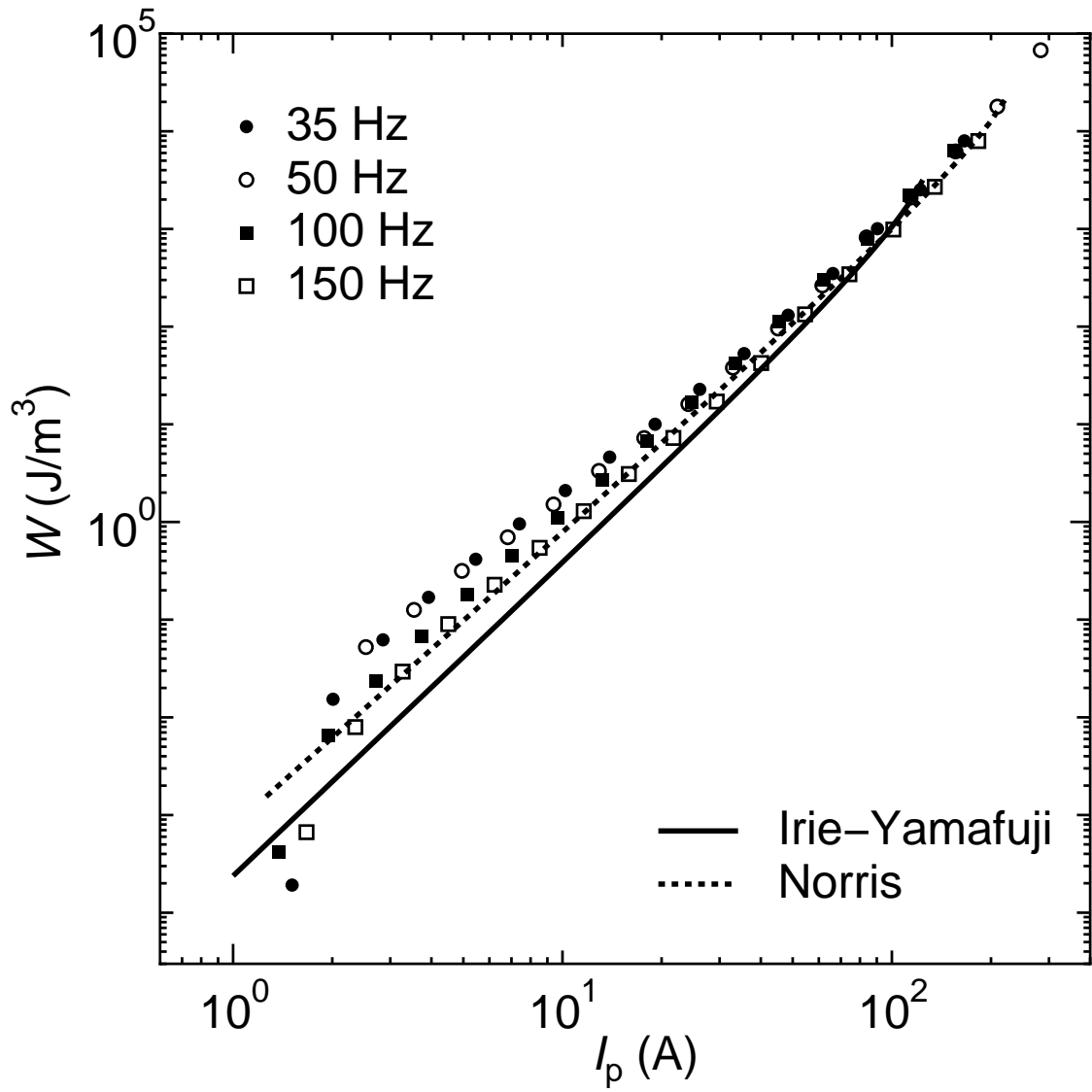


図 1.6. 500 A トランスによる損失の電流依存性。

第 2 章 有限要素法による数値解析

2.1 有限要素法

超伝導体を用いた機器の開発を考える場合、実際に超伝導体試料を作成して電磁特性を測定し、その結果をフィードバックして新たに試料を作成するという過程をとると、非効率であり、かつコストもかさんでしまう。そこで、試料を作成する前に、予め目的とする試料の特性を理論計算もしくは数値計算で知ることができれば非常に有意義である。超伝導体の形状として、例えば、円断面などのように対称性の高い形状であれば、理論式による特性の見積もりが可能となるが、矩形断面などのように対称性の低い複雑な形状をした超伝導体であれば、理論による特性の見積もりをする場合、自己無矛盾の磁束分布解を求めなければならず非常に困難である。このように複雑な形状をもち理論的に特性を見積もることが非常に困難な場合の電磁特性を見積もる方法の一つとして有限要素法(以下 FEM(Finite Element Method) と述べる)が挙げられる。

FEM では、目的とする試料のモデルを作成し、その作成したモデルが多数の要素の集合からなるとみなし、各要素中において Maxwell の電磁方程式((2.1)式~(2.4)式)が成り立ち、かつ隣り合う要素間での電磁量が、境界条件を満たしながら連続となるように解を求めていく方法である。またこの手法では、実際には目で見ることのできない物体内部領域の電磁量の変化を可視化することが可能であり、非常に興味深い手法である。しかし、要素の分割の仕方によって計算結果が大きく異なる場合があるため、FEM による数値計算には注意を払う必要がある。以下にその電磁界を支配する Maxwell の電磁方程式を示す。

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho \quad (2.4)$$

ここで、 \vec{B} 、 \vec{H} 、 \vec{D} 、 \vec{E} 、 \vec{J} はそれぞれ磁束密度、磁界の強さ、電束密度、電界の強さ、電流密度であり、 ρ は電荷密度である。求まる解は、領域全体で自己無矛盾でMaxwellの電磁方程式を満たす。またこれらの間には、次式の関係がある。 ρ は電荷密度である。

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.5)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (2.6)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.7)$$

ここで、 μ 、 ε 、 σ はそれぞれ、透磁率、誘電率、導電率である。

今回、FEMでの数値解析の手法として磁気ベクトルポテンシャル法(A - ϕ 法)を用いた⁵⁾。この手法は、解析領域内に導体または磁性体が存在して、それに渦電流が流れ、これによる磁界の影響が問題になるような場に対する解析に有効である。ただし、変位電流は考慮していない。

2.1.1 磁気ベクトルポテンシャルと電位を用いた方程式 (A - ϕ 法)

導体に鎖交する磁束が変化すると起電力が生じ、渦電流が流れる。この渦電流密度 J_e は次式で与えられる。

$$\vec{J}_e = \sigma \vec{E}_e \quad (2.8)$$

ここで、 \vec{E}_e は電磁誘導によって生じた渦電流を流すための電界である。この \vec{E}_e は次のようにして導出される。(2.2)式および $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ より、

$$\text{rot} \vec{E}_e = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot} \vec{A}) \quad (2.9)$$

これより、

$$\text{rot}(\vec{E}_e + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \quad (2.10)$$

(2.10) 式は $\vec{E}_e + \partial\vec{A}/\partial t$ は保存場であることを意味するので、電位 ϕ が定義でき、以下の式が成立する。

$$\vec{E}_e = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\phi \quad (2.11)$$

ただし、上式の $\text{grad}\phi$ は渦電流を流すための磁束をベクトルポテンシャル \vec{A} を用いて表現する際に必要な補正項である。よって、渦電流密度 \vec{J}_e は (2.8) 式、(2.11) 式より

$$\vec{J}_e = -\sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \sigma\text{grad}\phi \quad (2.12)$$

となる。

一方、渦電流場の電流密度 \vec{J} は、強制電流密度 \vec{J}_0 と渦電流密度 \vec{J}_e を用いて次式のように表される。

$$\vec{J} = \vec{J}_0 + \vec{J}_e \quad (2.13)$$

ここで、(2.1) 式において変位電流を無視した以下の式

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} \quad (2.14)$$

および $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ 、(2.5) 式、(2.12) 式、(2.13) 式より

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{rot}\vec{A}\right) = J_0 - \sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \sigma\text{grad}\phi \quad (2.15)$$

を得る。

また、渦電流密度 \vec{J}_e とそれによって作られる磁界の強さ \vec{H}_e の間には (2.14) 式より、以下の関係があることが分かる。

$$\text{rot}\vec{H}_e = \vec{J}_e \quad (2.16)$$

ここで、 $\text{div}(\text{rot}\vec{H}_e) = 0$ より

$$\text{div}\vec{J}_e = 0 \quad (2.17)$$

を得る。これに (2.12) 式を代入すると

$$\text{div}\left(\sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \sigma\text{grad}\phi\right) = 0 \quad (2.18)$$

となる。これら (2.15) 式および、(2.18) 式を連立して解くことにより、渦電流場での電磁界解析が可能となる。これを磁気ベクトルポテンシャル法 (\vec{A} - ϕ 法) と呼ぶ。

2.2 モデル

今回、FEMによる数値解析に用いたモデルは以下の二つである。

2.2.1 モデル1(円断面超伝導体)

n 値モデルの定性的評価および定量的評価をするために図2.1のような無限長の円柱状超伝導体の軸方向への交流通電を考える。軸方向および方位角方向の対称性より図2.2のようなモデルを用いる。

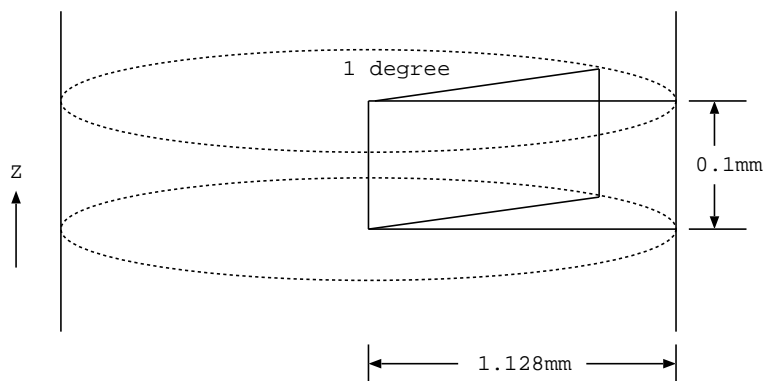


図 2.1. 円柱状超伝導体のモデル概要。

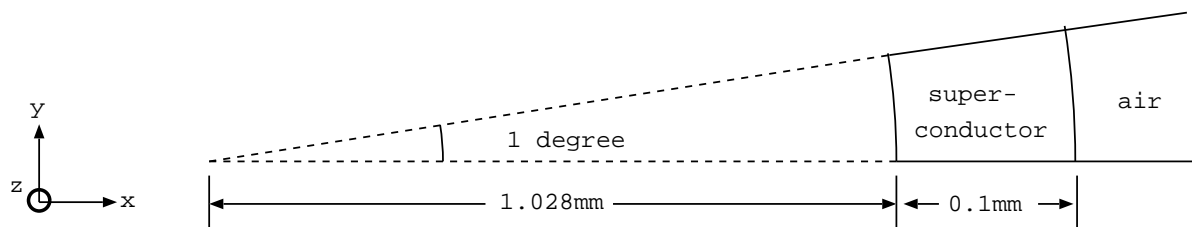


図 2.2. 円柱状超伝導体の 1/360 モデル。

2.2.2 モデル2(矩形断面超伝導体)

超伝導体の形状依存性を考えるため矩形断面の超伝導体を考える。図2.3のモデルはアスペクト比1の矩形断面の超伝導体をあらわしており、実際の数値解析においては対称性より図2.4のようなモデルの1/4の部分を考慮したアスペクト比2、4、8、16、32、64におけるモデルを用いた。

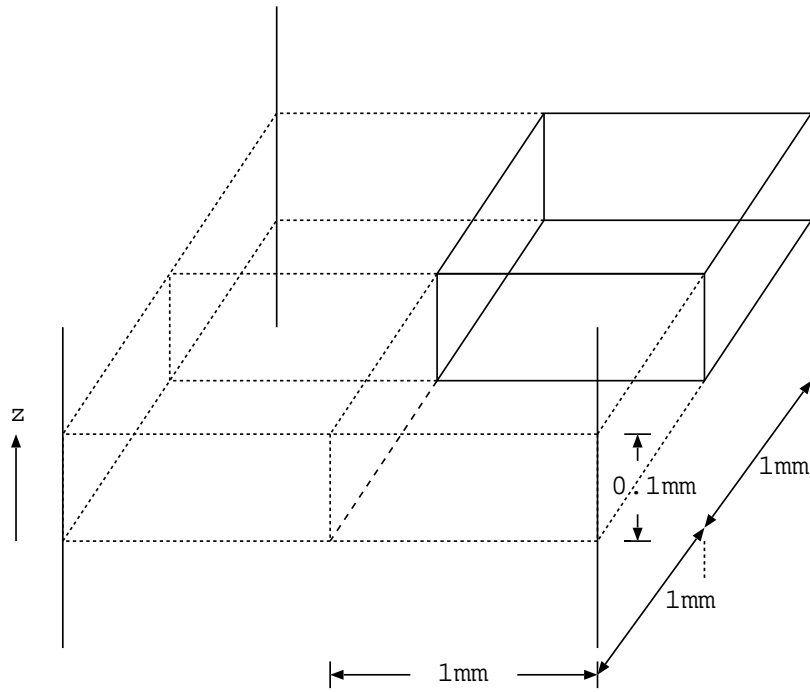


図 2.3. アスペクト比 1 の矩形断面超伝導体のモデル概要。

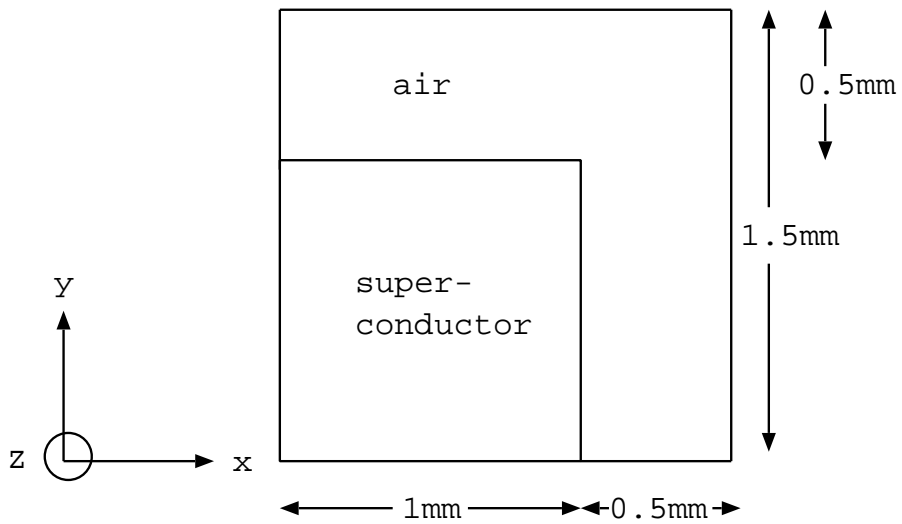


図 2.4. アスペクト比 1 の矩形断面超伝導体の 1/4 モデル。

第 3 章 シミュレーションおよび結果検討

3.1 FEM によるシミュレーション結果

今回、超伝導体の交流損失を数値解析⁶⁾するにあたって、日本総合研究所 JMAG-Studio Ver.7 という市販のソフトを用いたため信頼性の検証の確認が必要となるが、これについては付録 A.1 節を参照されたい。また、 J_c の磁界依存性 (付録 A.2 節参照) については、以前得られた結果より磁界依存性を考慮すると、通電損失の通電電流に対する傾きが増加することがわかっているため、ここでは深く触れていない。以下に各モデルにおいて長さ方向に通電した場合のシミュレーション結果を示す。

3.2 超伝導体の形状依存性

通電損失の形状効果について議論するために、矩形超伝導体のアスペクト比に焦点をおきシミュレーションを行なった結果が図 3.1 である。これは、矩形断面の各アスペクト比による損失と円断面での損失との比較をあらわしており、断面積はすべて $4 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ となっている。また、Bean モデルを仮定しているため、磁束クリーブの影響を無視している。ここで、図 3.1 より、アスペクト比が大きくなるにしたがって傾きを保ったまま、損失が小さくなる傾向が伺えた。これは、超伝導体内部の磁束分布が異なるためだと考えられる。そこで、超伝導体内部の磁束分布を図 3.2 ~ 図 3.7 に示す。これは各アスペクト比による超伝導体内部の $i \equiv I_p/I_c = 0.2$ つまりモデルに 800 A 通電した場合の磁束分布 (1/4 モデル) を表している。これらの図から、アスペクト比が大きくなるにしたがって表面の磁束密度が小さくなっているのが分かる。従って、アスペクト比が大きくなるほど、つまり外周の長さが長くなるほど電流による自己磁界が減少するため、磁界の侵入距離が短くなり、損失が小さくなると考えられる。言い換えると、

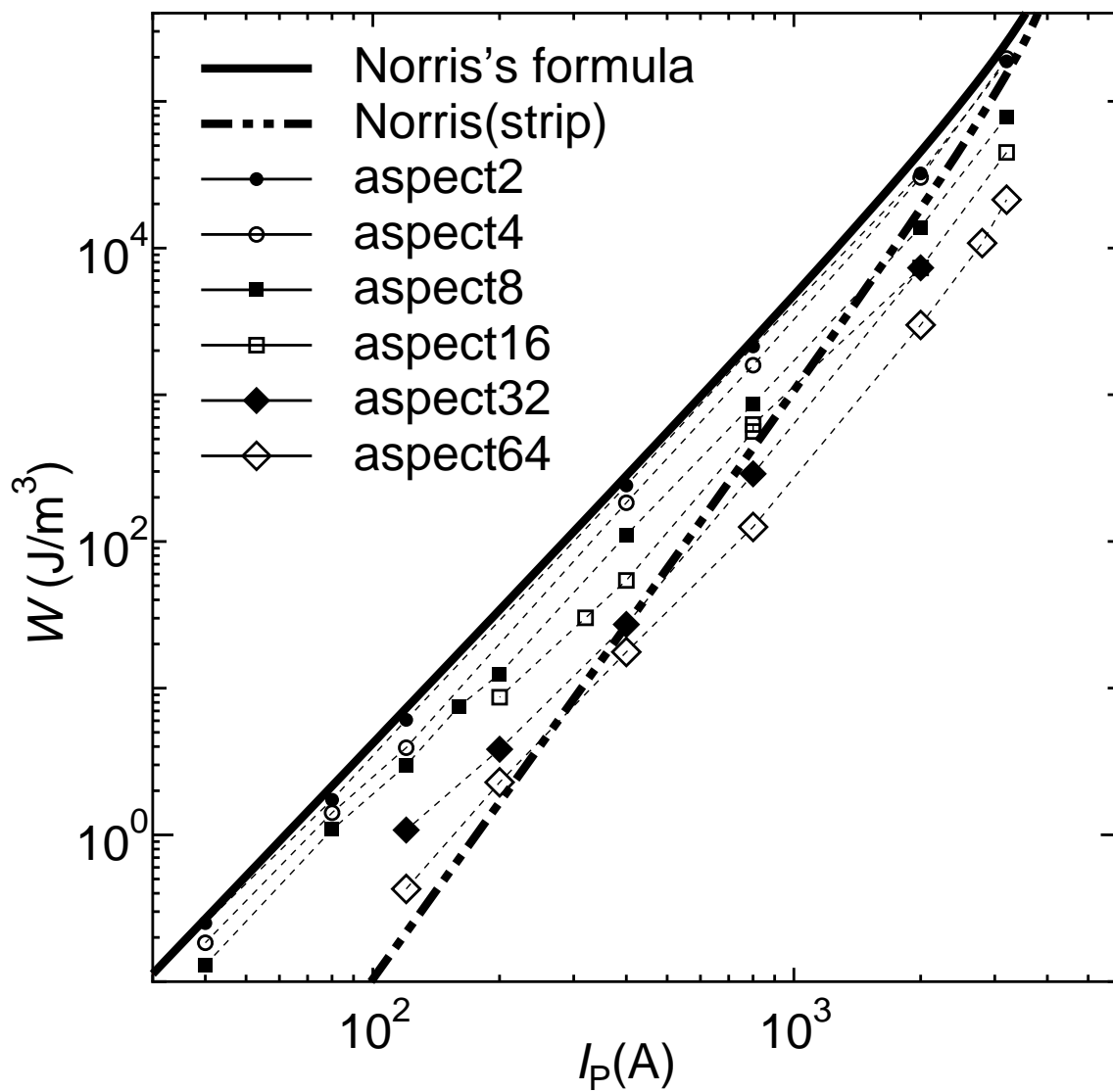


図 3.1. 矩形断面の各アスペクト比による損失と円断面での損失との比較。

ピーク値 ($i = 0.2$) の磁束分布

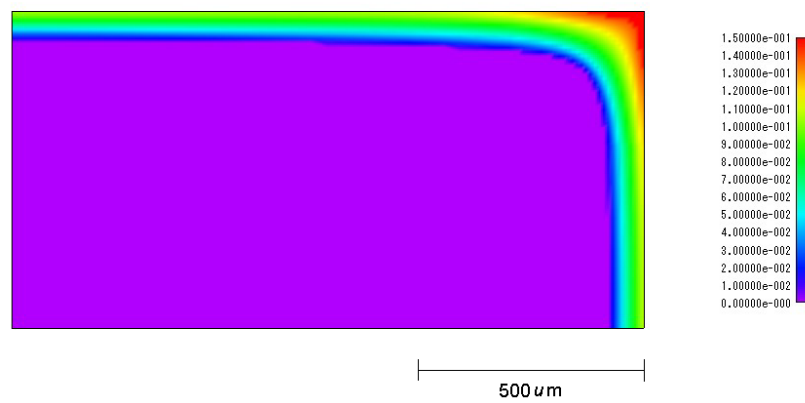


図 3.2. aspect 比 2 の磁束分布。

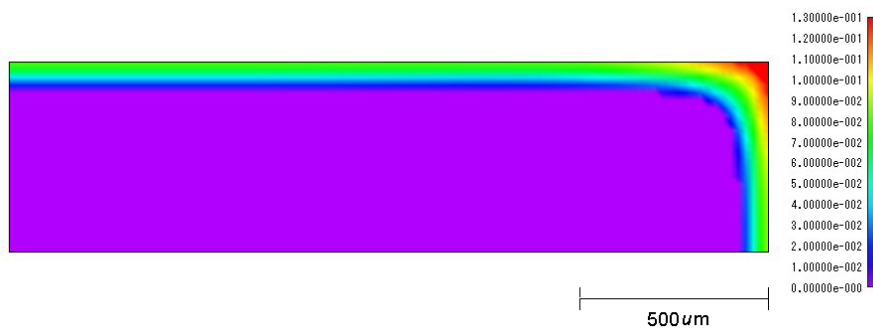


図 3.3. aspect 比 4 の磁束分布。

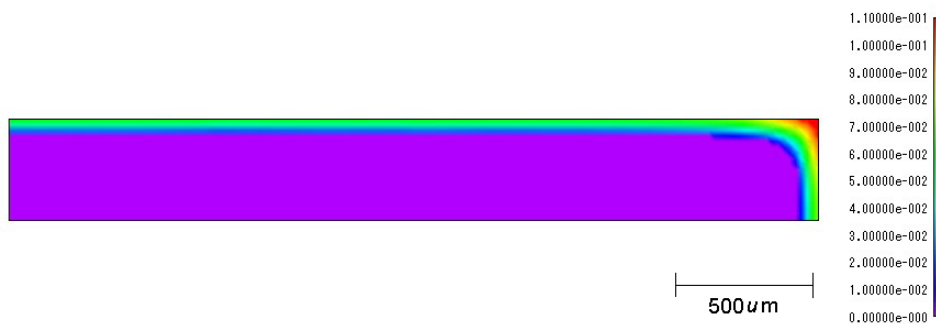


図 3.4. aspect 比 8 の磁束分布。

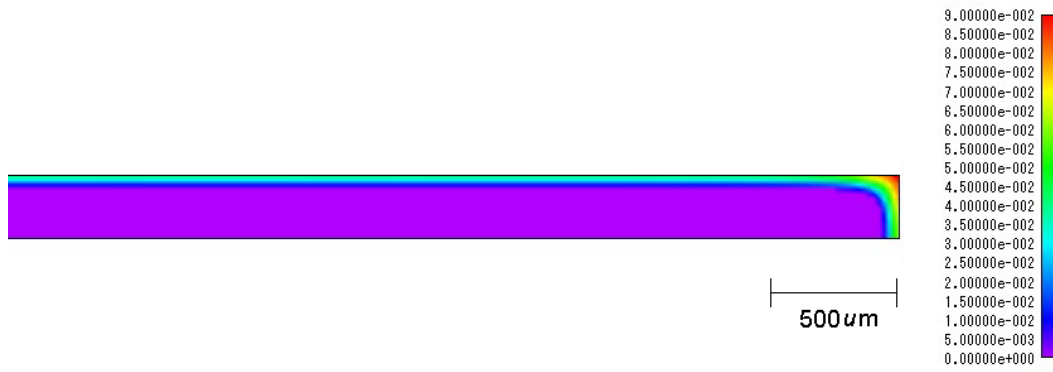


図 3.5. aspect 比 16 の磁束分布。

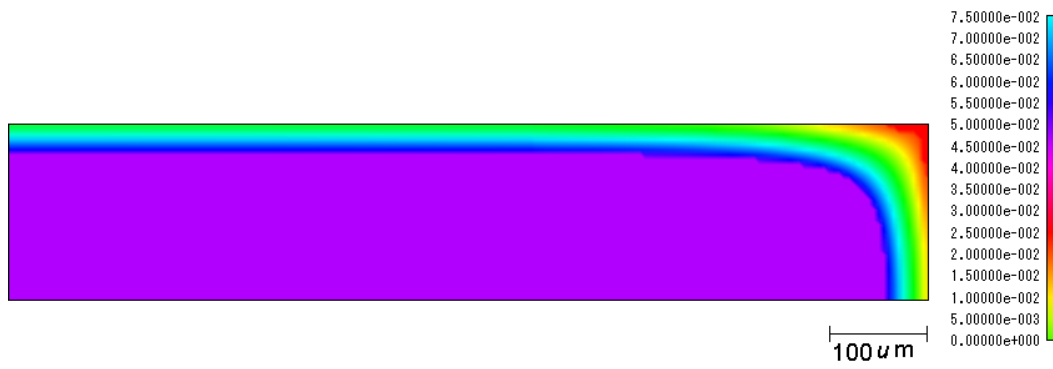


図 3.6. aspect 比 32 の磁束分布。

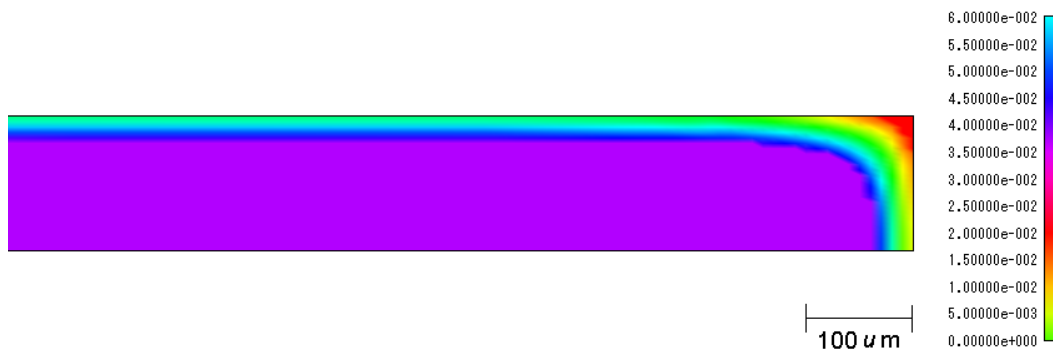


図 3.7. aspect 比 64 の磁束分布。

矩形断面の超伝導体の損失 W は外周の長さを l とすると、損失 W と外周 l には $W \propto l^{-2}$ という関係があると考えられる。そこで、損失 W と外周 l において $W \propto l^{-2}$ という関係に対し、理論的な観点から考え、かつ損失のアスペクト比を無限大にした場合の交流損失について議論する。

まず、厚さ $2d$ の無限平板の超伝導体に交流通電した場合の Bean モデルでの損失は、超伝導体表面での電流による自己磁界の振幅を H_1 とすると

$$W = \frac{2\mu_0 H_1^3}{3J_c d} \quad (3.1)$$

と表される。一方、規格化電流 i は、 H_1 での磁束の侵入距離を x_b とすると、 $x_b = I/2J_c$ より

$$i = \frac{x_d}{d} = \frac{I}{2J_c d} \quad (3.2)$$

となる。ただし、 I (A/m) は単位長さあたりの通電電流の振幅である。また、 $H_1 = I/2$ であるので、

$$H_1 = J_c i d \quad (3.3)$$

となる。従って、(3.2) 式、(3.3) 式より (3.1) 式は

$$W = \frac{2}{3} \mu_0 J_c^2 i^3 d^2 \quad (3.4)$$

となる。

ここで、断面積 S 、アスペクト比 α の超伝導体を考える。一辺の長さを a 、外周の長さを l とすると、 $S = \alpha a^2$ 、 $l = 2a(1 + \alpha)$ となる。今、無限平板を考え、アスペクト比 α が無限大、 $a = 2d$ だとすると、

$$l = 2a\alpha = \frac{2S}{a} = \frac{S}{d} \quad (3.5)$$

となる。この式を (3.4) 式に代入すると、

$$W = \frac{2}{3} \mu_0 J_c^2 i^3 S^2 l^{-2} \equiv C l^{-2} \quad (3.6)$$

となり、アスペクト比が大きい場合、損失が超伝導体の外周 l の -2 乗に比例することが示せた。

そこで、図 3.9、3.10 において通電電流値 400 A および 800 A、つまり $i = 0.1$ 、 0.2 の二つの場合を例にとって見てみる。まず、 $i = 0.1$ について見てみる。すると、フィッティングの結果、FEM の結果を次式で表現をすることが可能である。

$$W = 1.782 \times 10^{-2} l^{-2} \quad (3.7)$$

また、(3.6)式から求めたパラメータ C は 1.340×10^{-2} でありフィッティングからもとめたパラメータと大きな違いはない。

次に、 $i = 0.2$ について見てみる。すると、フィッティングの結果、FEMの結果を次式で表現をすることが可能である。

$$W = 1.501 \times 10^{-1} l^{-2} \quad (3.8)$$

また、(3.6)式から求めたパラメータ C は 1.072×10^{-1} であり、 $i = 0.1$ の場合と同様にフィッティングからもとめたパラメータと大きな違いはない。

このことから、矩形断面の超伝導体の損失に対して $W \propto l^{-2}$ の関係があるという議論が妥当であると考えられる。従って、断面積 S および、通電電流値一定の状態では l を大きくすると、Bean モデルでの損失はゼロに近づくと考えられる。

一方、厚さのない有限幅の無限長平板の交流損失は Norris の strip モデルが実験結果によく一致することが知られており、アスペクト比が 5000 のストリップ形状の超伝導において損失とピーク電流の傾きが急勾配になるという報告がされている。これは図 3.1 からよくわかる。しかし、これは現在の FEM の解析による結果と矛盾している。以下に Norris の strip モデルによる理論式を示す。

$$W = \frac{\mu_0 I_c^2}{\pi S} \{ (1+i) \log(1+i) - i^2 + (1-i) \log(1-i) \} \quad (3.9)$$

また上式によると、アスペクト比が無限大の無限平板の損失はゼロにはならず FEM((3.6)式)の予想と異なる。このような違いが起る要因について考察する。

図 3.8 に、我々が仮定している平板、および Norris の strip モデルにおいて、電流を通電した場合での位置における電流密度分布、また、各々が仮定している平板での磁界の侵入方向を示す。なお、図 3.8(左図)では y 軸は位置を横軸は電流密度分布を右図では x 軸は位置を縦軸が電流密度分布を表している。これは双方で仮定している磁界の侵入方向が異なるためである。まず、我々の理論((3.6)式)では厚さのない無限平板を仮定しており、磁界の侵入は、平板に対して垂直な方向からの寄与しか考慮していない。また、Norris の strip モデル((3.9)式)では、厚さのない有限幅の無限長平板

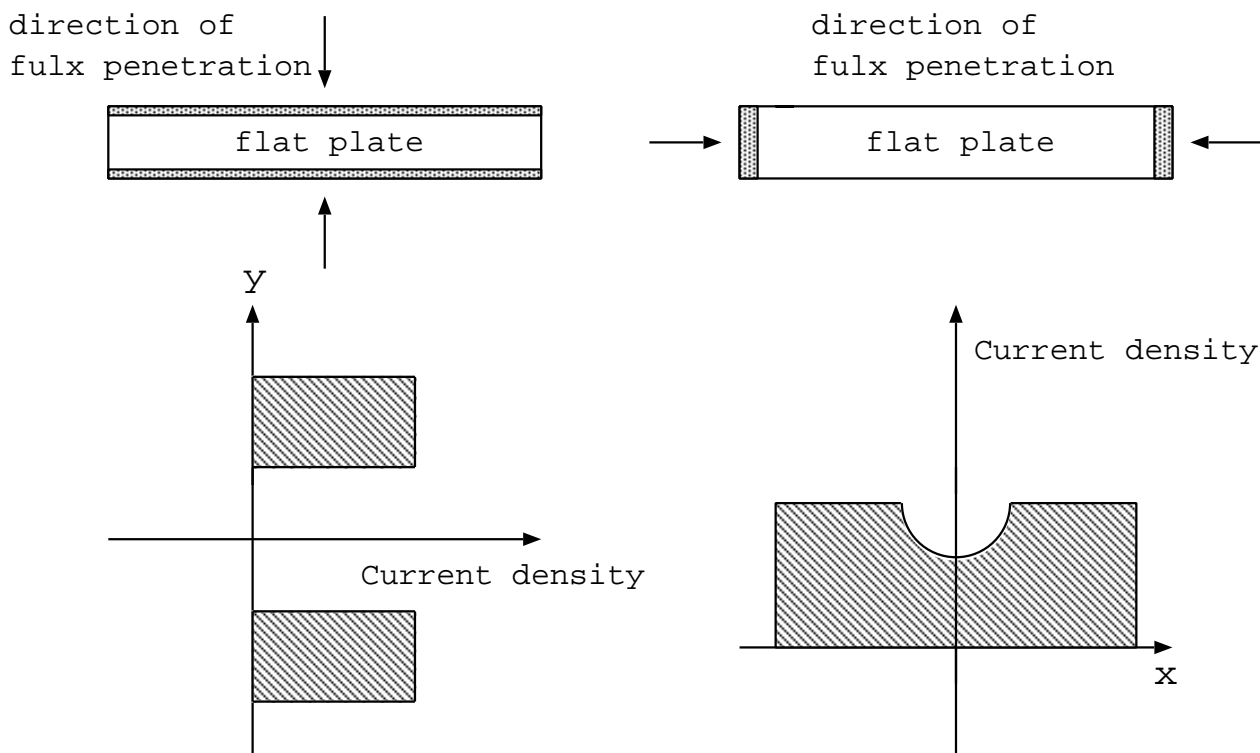


図 3.8. 我々が仮定している理論(無限平板)での電流密度分布(左)、および磁界の侵入方向(左上)、Norrisのstripモデル(有限幅の無限長平板)での電流密度分布(右)、および磁界の侵入方向(右上)。

を仮定しており、磁界の侵入は、平板に対して幅方向からの寄与しか考慮していない。さらに、このstripモデルではBeanモデルを仮定しているにも関わらず、平板に平行な方向からの磁界の寄与による磁束分布および電流密度分布がBeanモデルと異なる。これは、図3.8からも明らかである。このように、そもそも仮定している形状、磁界の侵入方向、その磁束分布および電流密度分布が異なるためにFEMの結果と異なると考えられるが、どちらの仮定がより現実的なのか、理論的な解明は今後の課題である。

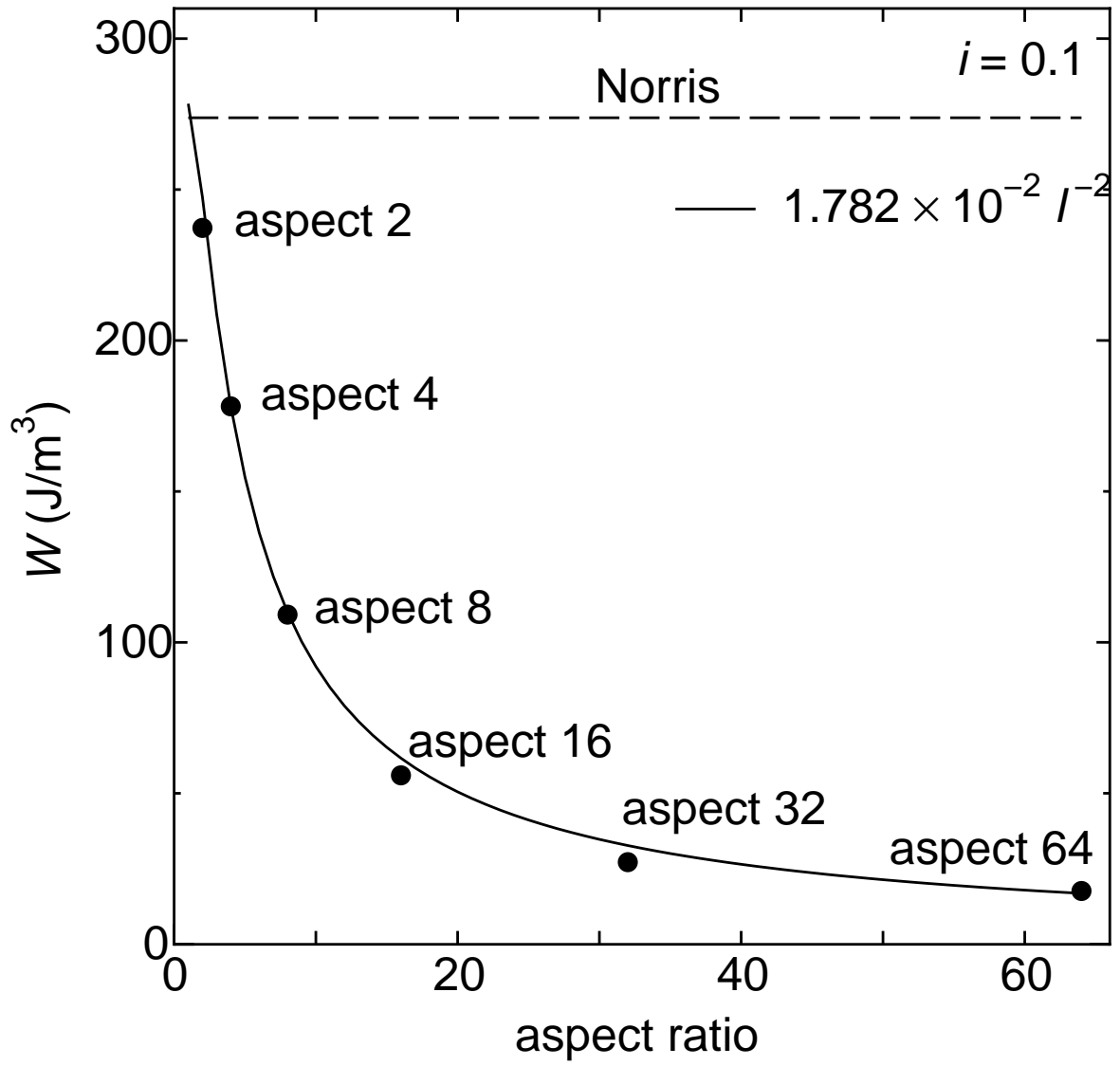


図 3.9. $I_p = 400$ A での損失とアスペクト比の関係。

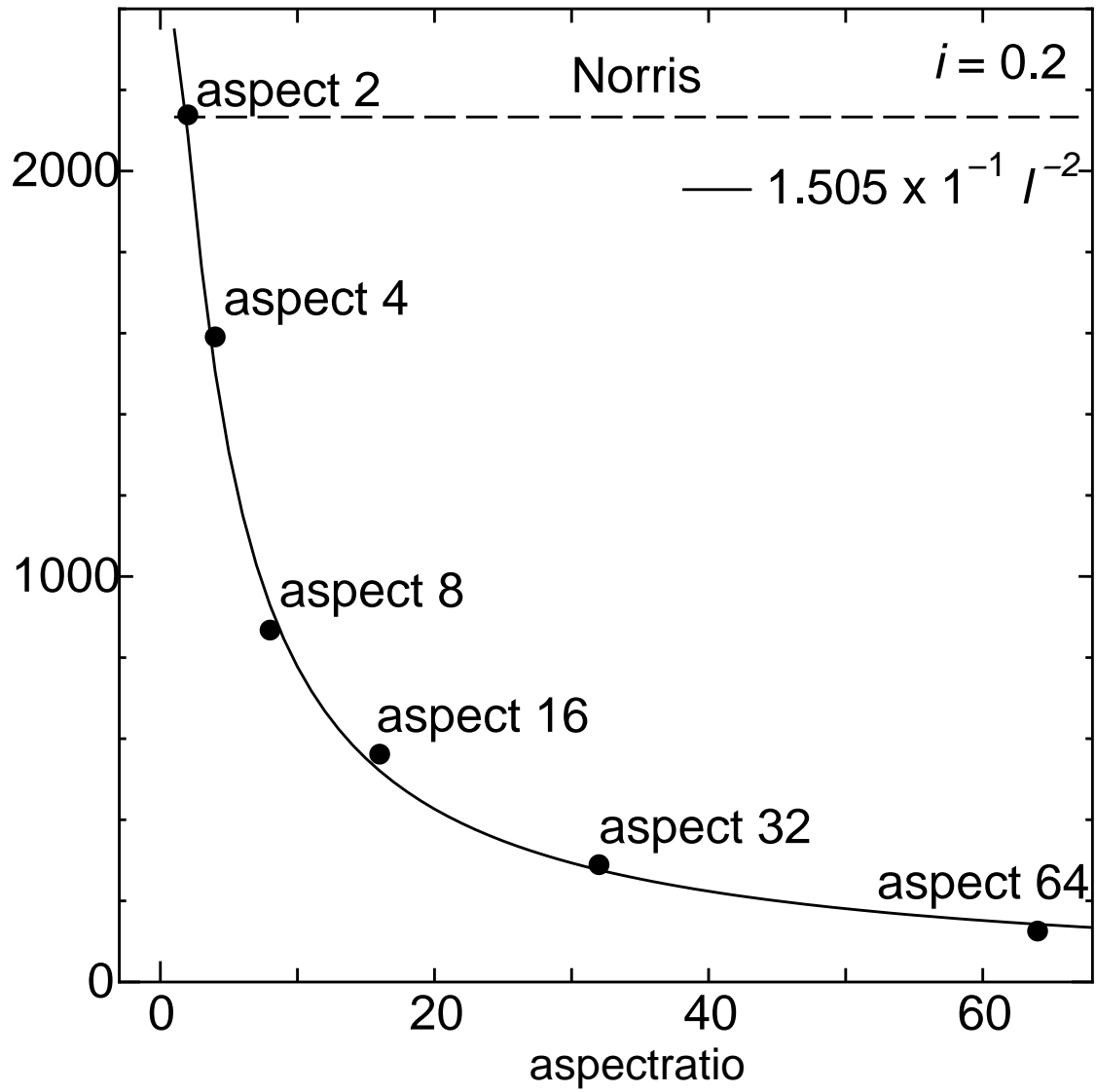


図 3.10. $I_p = 800$ A での損失とアスペクト比の関係。

3.3 超伝導体の n 値依存性

今回は、磁束クリープの影響を近似的に表現するために、 n 値モデルを用いた。また、 n 値モデルでは発生する電界を近似的に以下の式で表し、半径 $r = 1.128 \times 10^{-3}$ m の円柱状超伝導体において n 値モデルを仮定し、シミュレーションを行なった。

$$E = E_c \left(\frac{J}{J_c} \right)^n \quad (3.10)$$

ここで、 E_c は臨界電流密度 J_c を決めるための電界基準である。また、本研究では通常、 $E_c = 1 \times 10^{-4}$ V/m とし、 $J_c = 1 \times 10^9$ A/m² としている。

図 3.11 は円断面の超伝導体における $n=10$ 、20、30 での損失と Bean モデルの比較を表している。FEM において、Bean モデルを仮定すると n 値は無限大となり、図のように実線で示されている。一般に n 値モデルにすると損失は Bean モデルより大きくなる。これは図からも容易に分かる。また、 n 値が小さくなるほど損失が大きくなっていることが分かる。つまり、 n 値を上げていくと、損失は小さくなり n 値が無限大の Bean モデルに近づいていくと考えられる。

3.3.1 FEM の定性的評価

ここで、 $i = 0.09$ 、つまりピーク電流 $I_p = 360$ A での各 n 値での損失の電流依存性を図 3.12 に示す。また、図が途中で切れているのは解析している周波数が異なるためである。図より n 値が大きくなるにつれて n 値が無限大の Bean モデルに漸近している様子が伺えこれから FEM の結果が定性的に正しいと考えられる。

3.3.2 FEM の定量的評価

次に、FEM の定量的な評価をするために、理論的な見積もりを行なう。 n 値モデルでは電界 E が生じている部分での電流密度は (3.10) 式より

$$J = J_c \left(\frac{E}{E_c} \right)^{1/n} \quad (3.11)$$

となる。この電流密度は仮想的な臨界電流密度 J'_c とみなすことができるので通電電流が小さい場合 ($i \ll 1$)、損失は (1.1) 式をテーラー展開し、 J'_c を用いて

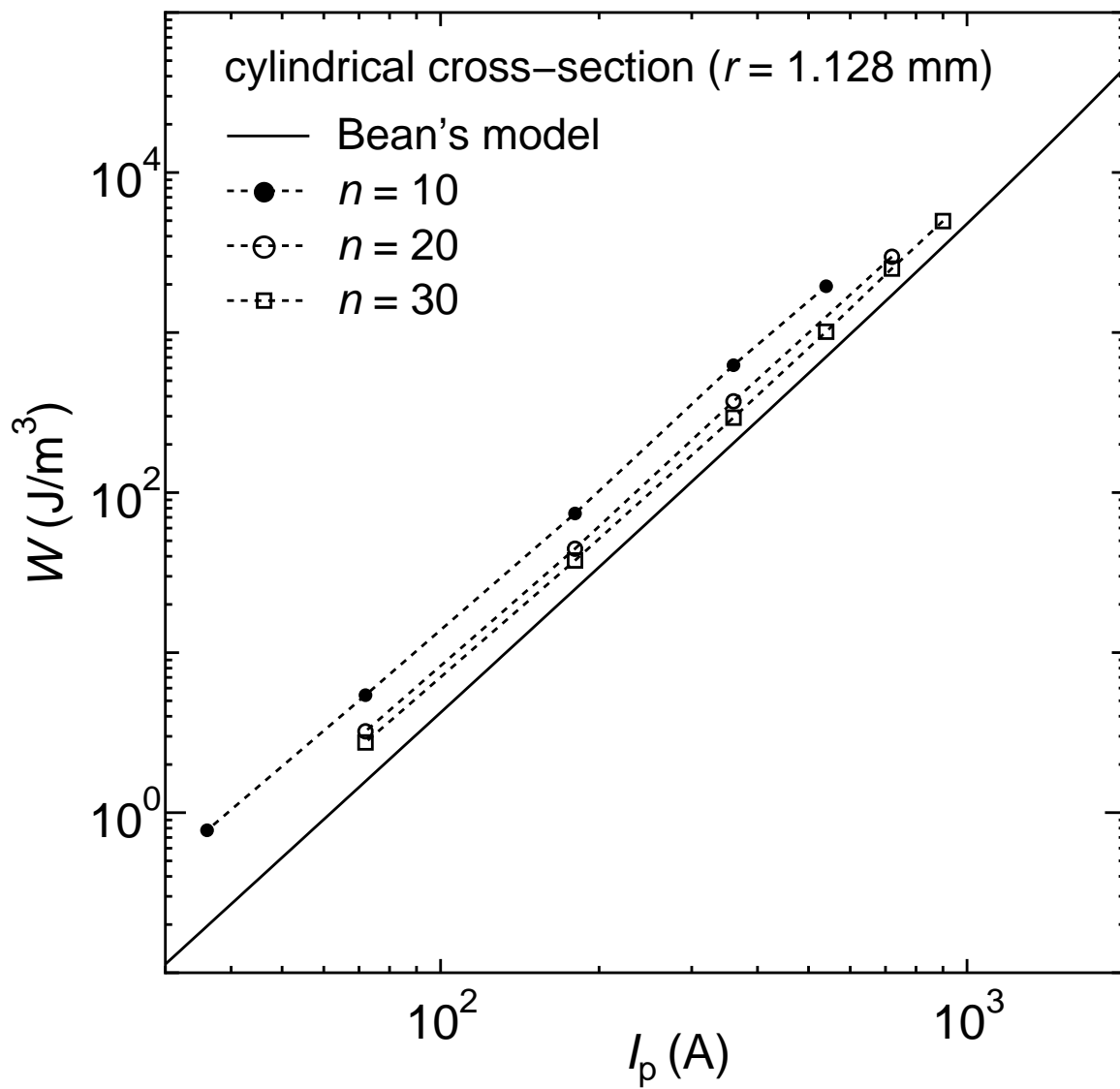


図 3.11. 円断面の超伝導体における各 n 値での損失と Bean モデルの比較。

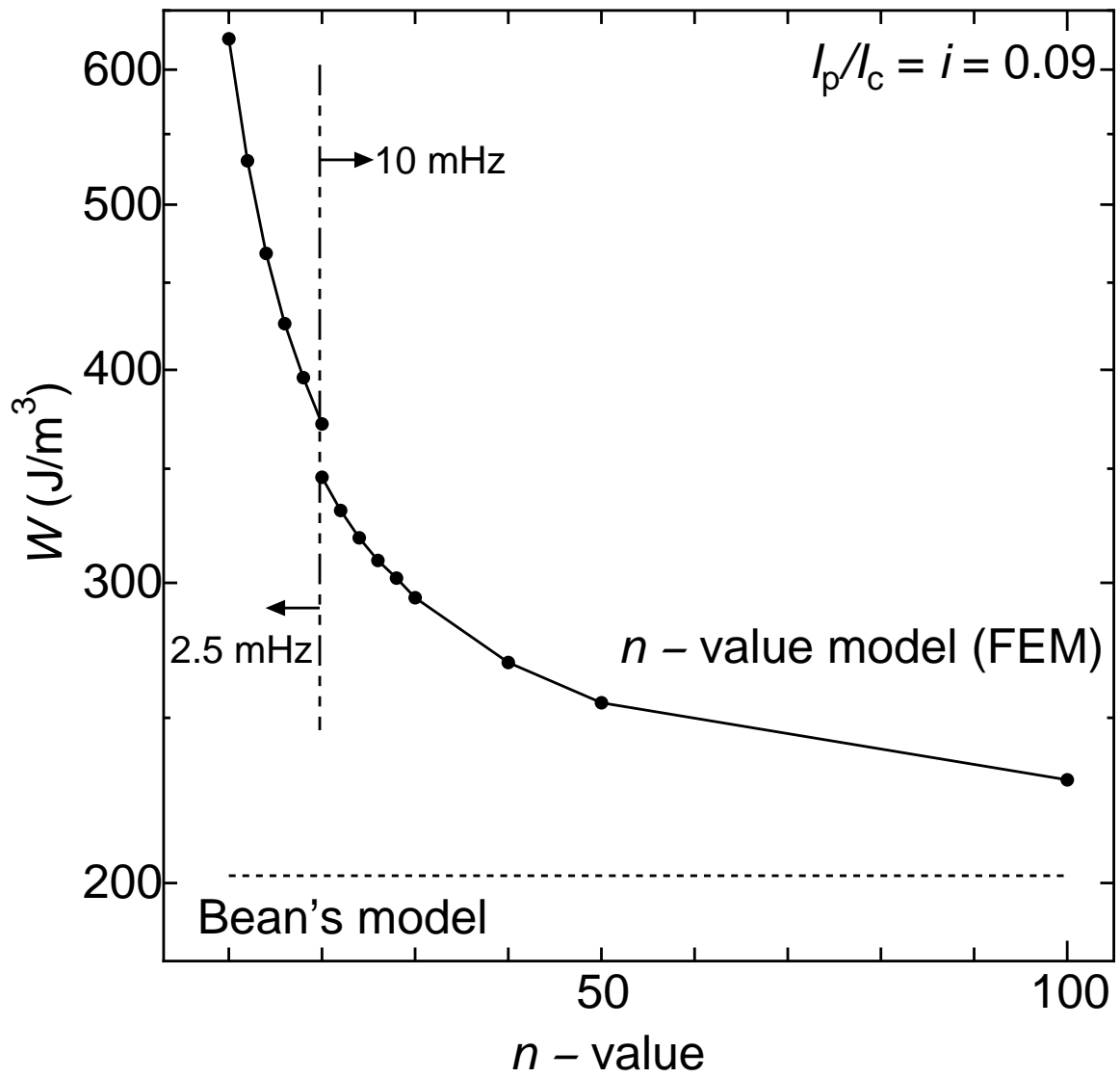


図 3.12. 損失の n 値依存性。

$$W = \frac{\mu_0 I_p^3}{6\pi S^2 J_c'} = \frac{\mu_0 I_p^3}{6\pi S^2 J_c} \left(\frac{E_c}{E} \right)^{1/n} \quad (3.12)$$

と表すことができる。ここで、 S は超伝導体の断面積であり、損失は $n \rightarrow \infty$ の Bean モデルを仮定している。

また、通電電流が十分に小さい $i = 0.09$ 、つまり 360 A 通電した場合の各 n 値での表面電界は、計算結果よりおよそ 1.0×10^{-7} V/m であったので、(3.12) 式を用いて評価した損失を理論的に見積もった値と Bean モデル、EFM のでの結果を図 3.13 に示す。ここで、FEM の結果と理論的見積もりを比較すると、FEM での結果の方が損失が大きくなっていることが分かる。これは、理論的見積もりの評価の際に表面電界を用いたため、電界自体を過大評価してしまっているため、結果として理論的見積もりの値が小さくなっていると考えられる。さらに、(3.12) 式は Bean モデルを用いているため n 値モデルの損失を正確に評価することはできない。しかし、先程述べたように n 値モデルでは n 値が小さい程、損失は小さくなるので、 $n \rightarrow \infty$ の Bean モデルを用いた (3.12) 式は n 値モデルの損失の下限值を表していると考えられ、FEM の結果はこの下限値よりも大きいことから、定量的に大きく外れていることはなく n 値モデルでのおおよその損失の見積もりが可能だと考えられる。ただし、より正確な定量的な損失の見積もりは必要であり、この点は今後の課題である。

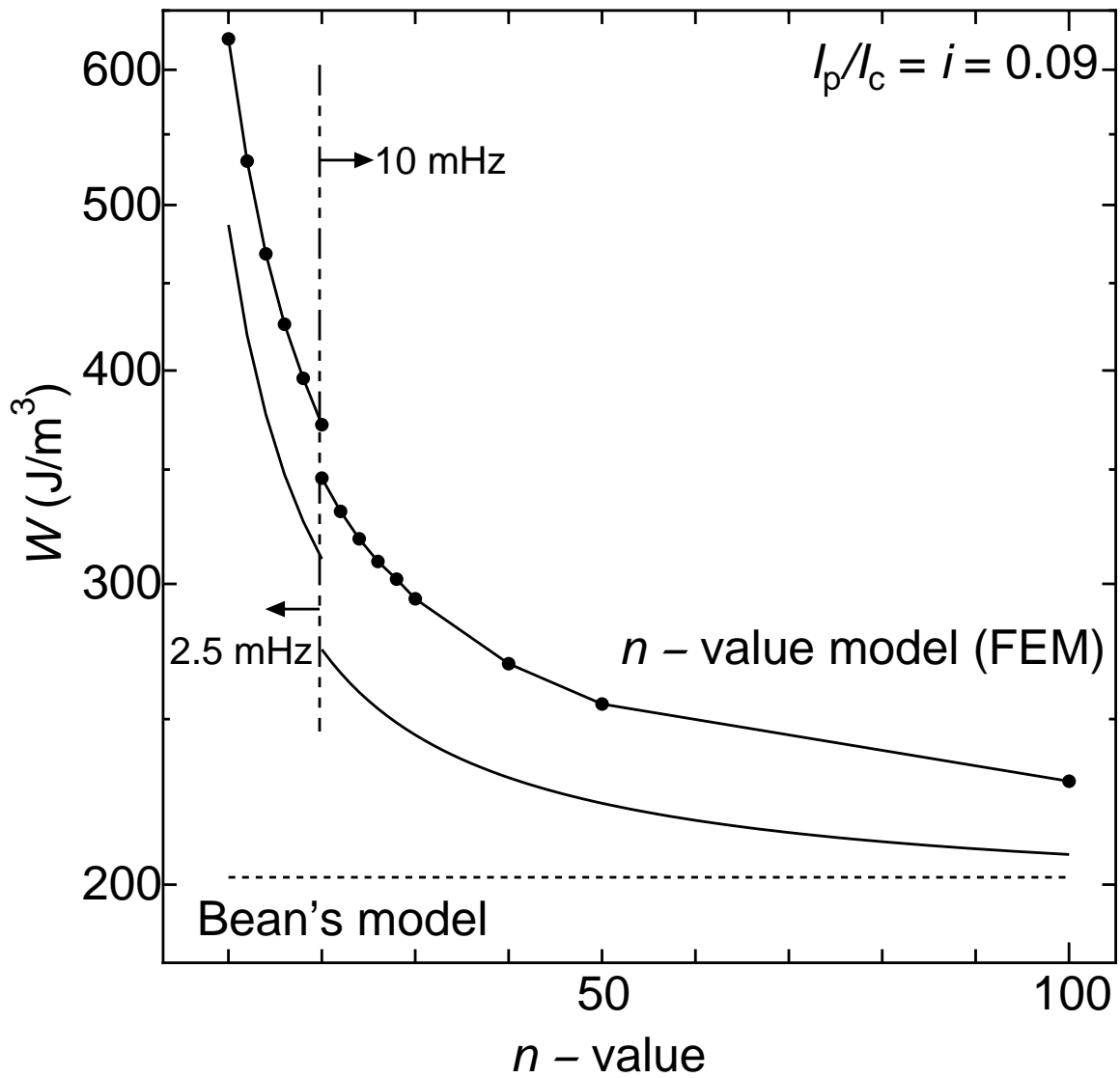


図 3.13. FEM と理論的見積もりとの比較。

3.4 まとめ

今回 FEM を用いて、二つの条件下での超伝導体の交流損失を評価した。その結果、以下のような結論を得た。

- Bean モデルにおいて断面の形状を矩形にした場合、同じ断面積をもつ円断面と比べると、損失は小さくなると考えられる。また、アスペクト比を無限大に近づけていくと損失はゼロになると考えられる。これは Norris の strip モデルの結果とは異なるが、これは仮定している形状が違うことが原因にあると考えられる。しかし、今後これについては理論的な説明が必要である。
- 円断面超伝導体において、 n 値モデルを用い損失を評価した場合、 n 値が大きいほど損失は小さくなり、 n 値が無限大の Bean モデルに漸近する様子が表現できた。これにより、FEM を用いた n 値モデルの定性的な数値解析が可能だということが分かった。また、定量的な理論的見積もりとの比較において、大まかな見積もりは可能だと考えられるがその検証には若干問題を残している。

第 4 章 結論と今後の課題

今回、有限要素法を用いた交流損失の数値解析において超伝導体の形状依存性および n 値依存性について着目し、議論、考察をしてきた。その結果、以下の結論に達した。

- FEM を用いて形状依存性を考慮にいった場合、アスペクト比を大きくすることにより損失が小さくなる傾向が伺えた。また、本研究では、Bean モデルを仮定しアスペクト比を無限大にした場合、損失はゼロになると結論づけたが、これは Norris の strip モデルの結果とは異なり、この違いについては理論的な説明が必要である。
- 磁束クリープの影響を近似的に表現している n 値モデルにおいて n 値が小さいほど損失が大きく、逆に n 値が大きくなるほど損失が小さくなり n 値が無限大の Bean モデルに漸近している様子が伺え、実際見られる現象 (磁束クリープの影響が大きいほど、損失が大きくなる) と対応ができており定性的に正しいといえると考えられる。また定量的には大きくはずれては無いものの、その検証については、より正確な理論的な見積もりが必要である。

従って、交流機器への応用として期待されている電力ケーブルや超伝導限流器などに対し、若干の問題はあるもの FEM を用いたより現実的な損失の見積もりが可能であると考えられる。

付録 A 付録

A.1 FEMの信頼性の確認

今回、数値解析に日本総合研究所 JMAG-Studio Ver.7 という市販のソフトを用いたため信頼性の検証が必要となる。そこで、理論式との比較のために図 A.1 のような半径 11 mm の無限長の円柱状超伝導体の軸方向に交流通電した場合の様子を解析する。ここで、軸方向および方位角方向の対称性より図 A.2 のような 1/360 の扇形モデルを設定した。ただし、上下の面 (z 軸に垂直な面) には対称境界面を設定しており、対称性は保たれている。なお、通電電流は表面から最大で 1 mm 程度しか侵入しない値に設定するため、半径 10 mm 以内の領域は定義していない。さらに超伝導体の外部には空気層を設定している。

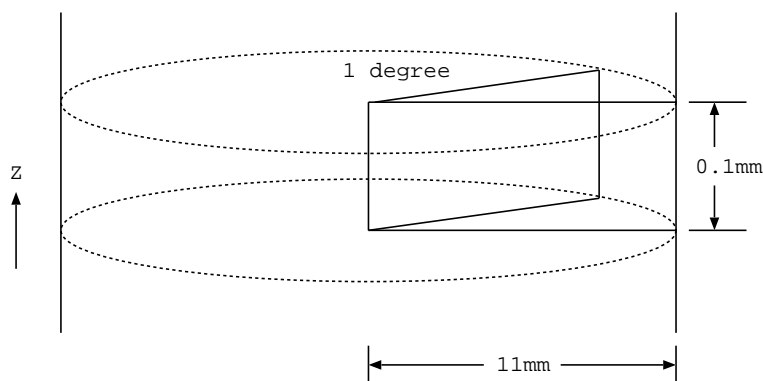


図 A.1. FEM で解析する無限長の円柱状超伝導体の概形。

一方、FEM ではモデルを複数の要素に分割しなければならない。分割の仕方によって得られる結果が大きく変わることがあるので要素の分割には注意をしなければならない。今回分割方法としては、磁束が動く方向である半径方向の要素の厚さ d に対して、以下の式で表される表皮厚さ (δ) に注目した。

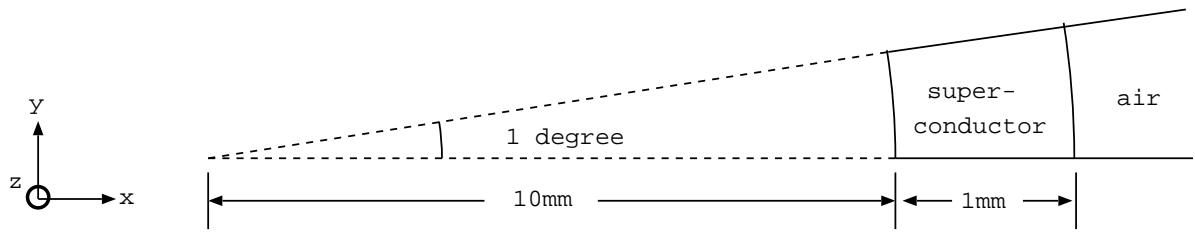


図 A.2. FEM で解析する無限長の円柱状超伝導体の 1/360 モデル。

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi\sigma\mu_0 f}} \quad (\text{A.1})$$

なお、 μ_0 は真空の透磁率、 f は通電周波数、 σ は導電率である。ここで、要素の厚さが表皮厚さより大きい場合、位置的な分解能が悪く、計算の精度が著しく低下するため要素の厚さを表皮厚さよりも小さくする必要がある。つまり、

$$d < \delta \quad (\text{A.2})$$

となるようにする。さらに、表皮厚さは通電周波数に依存するので (A.1) 式を満たすように周波数を設定する。従って (A.2) 式より

$$f < \frac{1}{\pi\sigma\mu_0 d^2} \quad (\text{A.3})$$

となり今回、図 A.2において半径 $r = 10 \text{ mm} \sim 11 \text{ mm}$ の範囲を 20 分割しているので、要素の厚さ $d = 50 \mu\text{m}$ となる。また、導電率 σ の値は $1.0 \times 10^{13} (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ を用いた。よって今回の解析において通電周波数は (A.3) 式の上限值より 10 Hz を用いた。このように、FEM において上記のような条件をもたせることで計算の精度を保つことができる。また表皮厚さについて、以下に軽く触れておく。

- 表皮厚さ

高周波電流が金属導体の表層部分を流れようとする性質を表皮効果といい、それを定量的に表したものが、表皮厚さである。また、導体の表面から表皮厚さだけ導体内部に侵入したところを流れる高周波電流は、表面を流れる高周波電流の $1/e$ 倍になり周波数が高くなると、周波数の $-1/2$ 乗に比例して表皮厚さは薄くなるという性質をもつ。

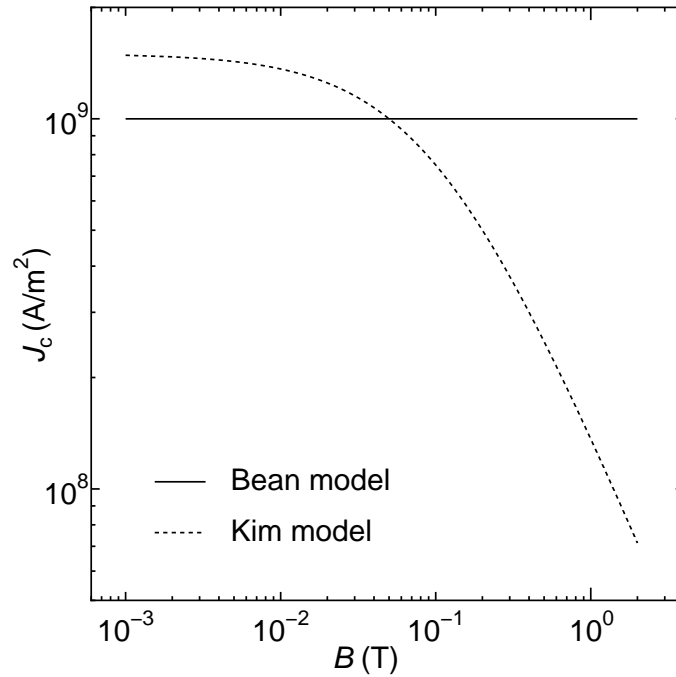


図 A.3. FEM で用いた磁界依存性。

次に J_c の磁界依存性として、図 A.3 のような Bean モデル ((A.4) 式) および Kim モデル ((A.5) 式) を仮定した。なお各モデルはそれぞれ次式で表される。

$$J_c = 1.0 \times 10^9 \quad (\text{A.4})$$

$$J_c = \frac{1.5 \times 10^9}{1 + |B|/0.1} \quad (\text{A.5})$$

図 A.4、A.5 はこのような条件下で行なった各モデルでの円断面超伝導体の方位角方向の時間変化を FEM を用いシミュレーションした結果である。図 A.4 は、磁界依存を考慮していない Bean モデル、図 A.5 は磁界依存を考慮している Kim モデルであり、それぞれ実線は理論値、シンボルは FEM による解析結果を表している。なお、横軸が位置を、縦軸が方位角方向の磁束密度を表しており、それぞれの通電電流値は、磁界の侵入距離が 1 mm 程度となるように決めた電流値である。それぞれの図を見ると分かるように、時間とともに磁束が出入りしている様子がよく表現されているのがわかる。また、実線の理論値と FEM の結果がよく一致しており FEM の計算が妥当だと考えられる。

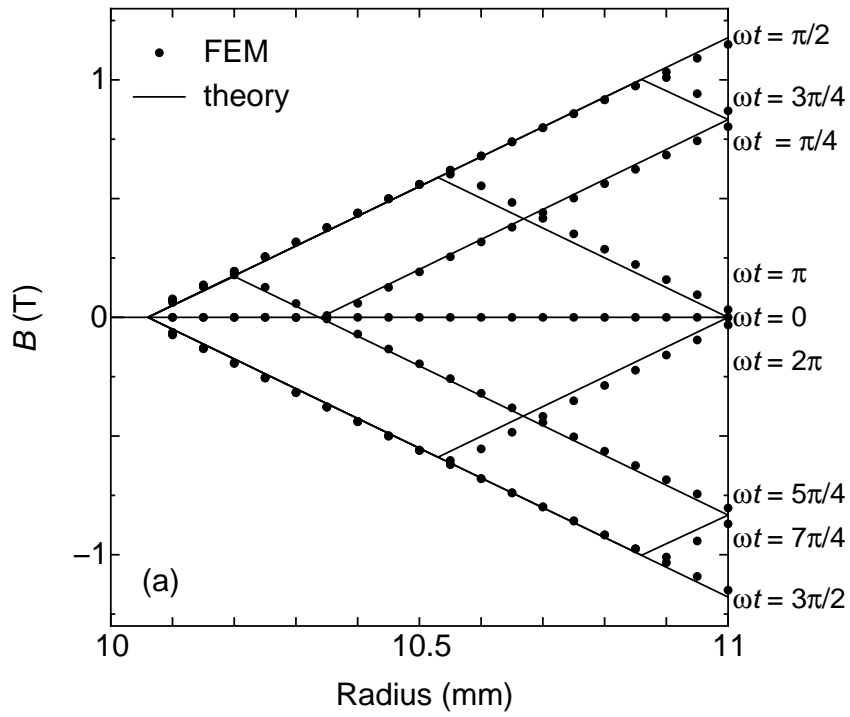


図 A.4. 64,800 A 通電時の Bean モデルでの超伝導体内部の磁束分布の様子。

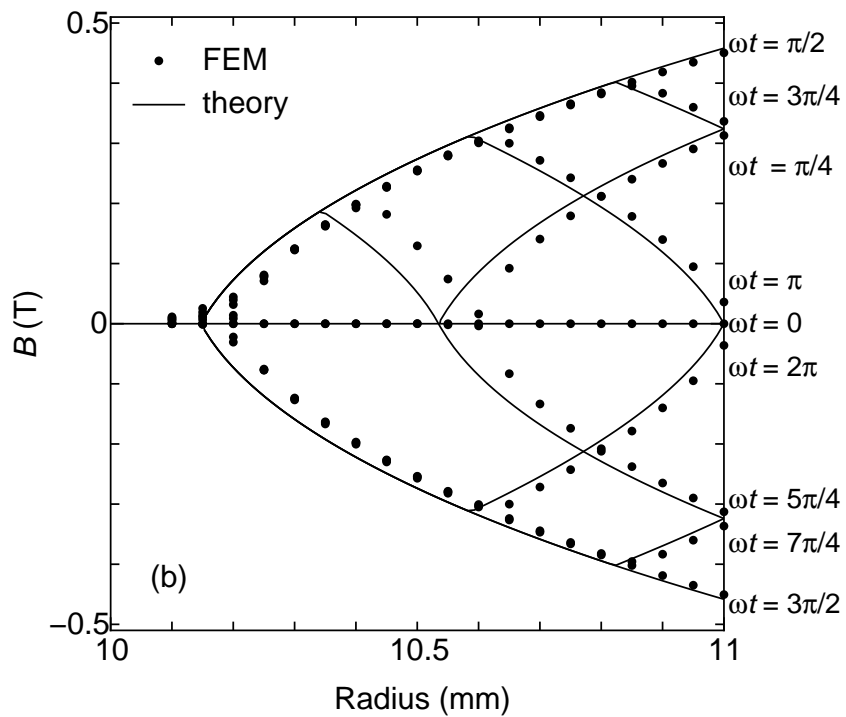


図 A.5. 25,200 A 通電時の Kim モデルでの超伝導体内部の磁束分布の様子。

以上の結果より、今回数値解析に用いたソフト (JMAG-Studio Ver.7) において、(A.3) 式のような条件下での要素分割を行なうことにより、比較的精度の高い超伝導体の電磁解析が行なえると考えられ、FEM における数値解析の信頼性が確認された。

また今回行なった解析において交流損失の評価は、周期的な半周期を時間積分し、超伝導体の体積で割ることで、一周期当り、単位体積当りの損失の見積もりを行なった。

A.2 超伝導体の磁界依存性

図 A.1 に示すような半径 11 mm の無限長の円柱状超伝導体の軸方向への交流通電した場合の損失について考える。 J_c の磁界依存性としては、図 A.3 のような Bean モデルおよび Kim モデルを仮定しており、図 A.6 は Bean モデル、Kim モデルでの解析結果で損失の電流依存性を表している。実線は Bean モデルの理論値、黒丸は Bean モデルの FEM による結果、破線は Kim モデルの理論値、白丸は Kim モデルの FEM による結果を表している。どちらのモデルも、FEM と理論値がよく一致していることがわかる。

またこの図から、磁界依存を考慮していない Bean モデルに対して、磁界依存を考慮している Kim モデルでは、高電流領域において損失の電流依存性が強くなり、傾きが増加していることが分かる。このような結果は、用いた磁界依存性の違いに起因する。図 A.3 を見てもわかるように Kim モデルの J_c は Bean モデルに比べ 0.05 T 付近を境に低磁界側で大きく、また高磁界側で小さくなっている。従って、Kim モデルでは、通電電流による自己磁界が大きい高磁界領域では Bean モデルよりも損失が大きく、逆に自己磁界の小さい低磁界領域では Bean モデルよりも損失が小さくなる。

従って、Kim モデルのようなには磁界の増加とともに J_c が単調減少するモデルを用いると、Bean モデルに比べ損失の通電電流に対する傾きが大きくなると考えられる。

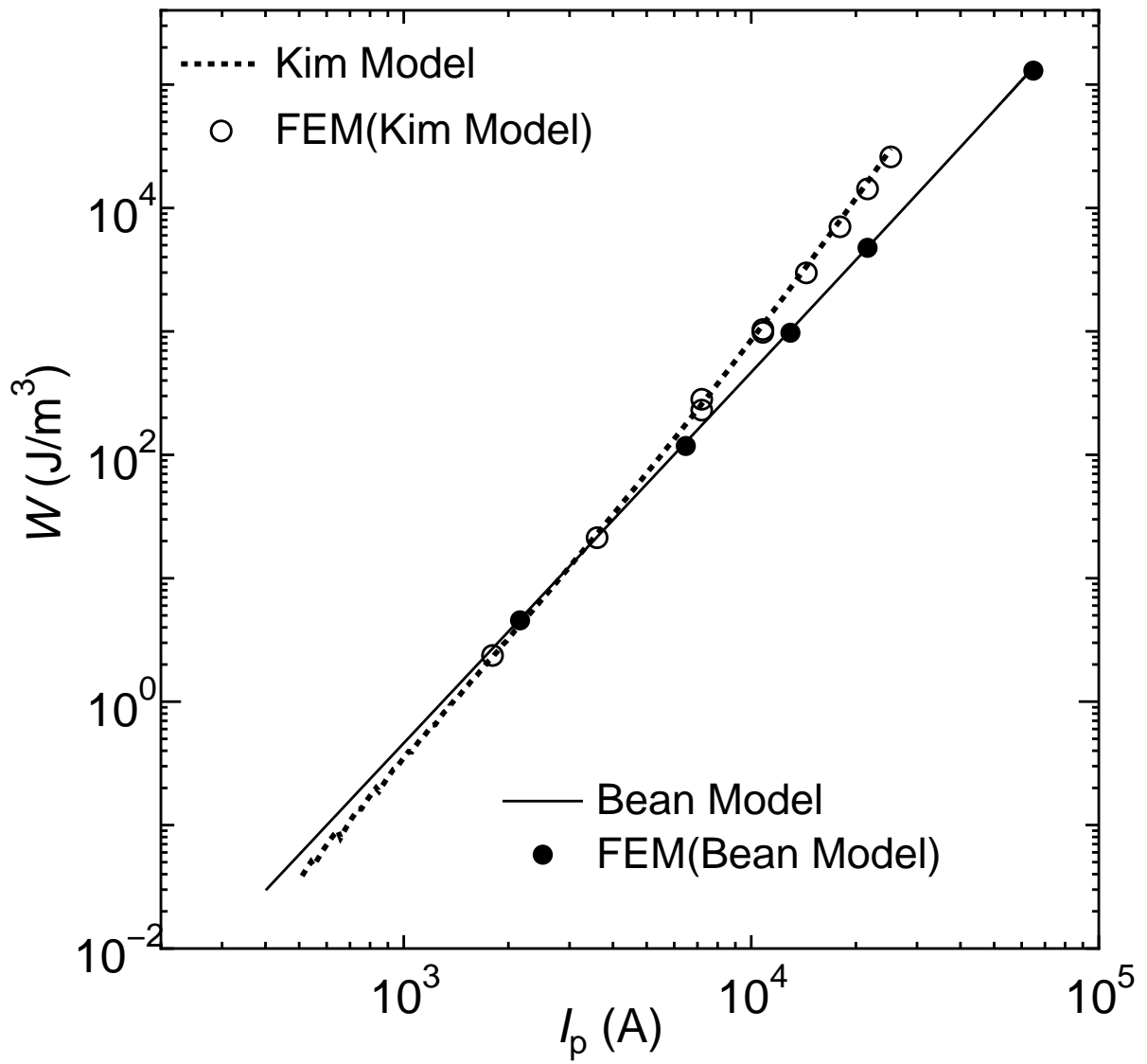


図 A.6. 円断面超伝導体の Bean モデルおよび Kim モデルでの損失の比較。

謝辞

本研究を行うにあたり、多大な御指導・助言を頂いた松下 照男教授、小田部 荘司助教授、木内 勝助手に深く感謝致します。また何も分かっていなかった私に、一から丁寧に御指導・助言をしてくださった右田 稔氏、和田 浩志氏ならびに松下・小田部研究室の方々に深く感謝致します。

参考文献

- 1) M. Murakami *et al.*: Jpn. J. Appl. Phys. **28** (1989) 1189.
- 2) W.T. Norris: J. Phys. D (Appl. Phys.) **3** (1970) 489.
- 3) E.S. Otabe, T. Endo, T. Matsushita, M. Morita, Physica C **357–360** (2001) 878.
- 4) 森實 康行, 九州工業大学卒業論文 (平成 11 年 2 月).
- 5) 高橋 則雄, 田中 高義 共著, 電気工学の有限要素法 p. 13.
- 6) M. Migita, T. Watanabe, E. S. Otabe, T. Matsushita, Physica C (2003).
- 7) S. Sugita, H. Ohsaki, 67th Meeting on Cryogenics and Superconductivity of Japan (2002) 113.